

This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + Refrain from automated querying Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + Beibehaltung von Google-Markenelementen Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter http://books.google.com/durchsuchen.

PA 459 , H67

• ١ : .

Sammlung

geometrischer Aufgaben

DOR

Meyer

Meier Hirfch,

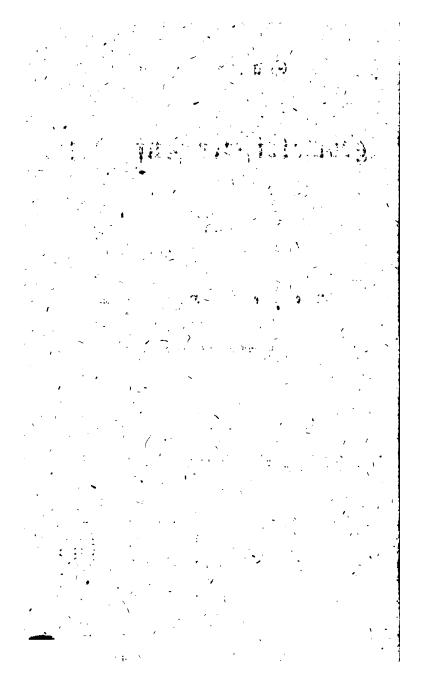
Privatlehrer ber Mathematif.

Bwenter Theil.

Mit 10 Aupfertafeln.

Berlin,

ben heinrich Frilich. 1807.

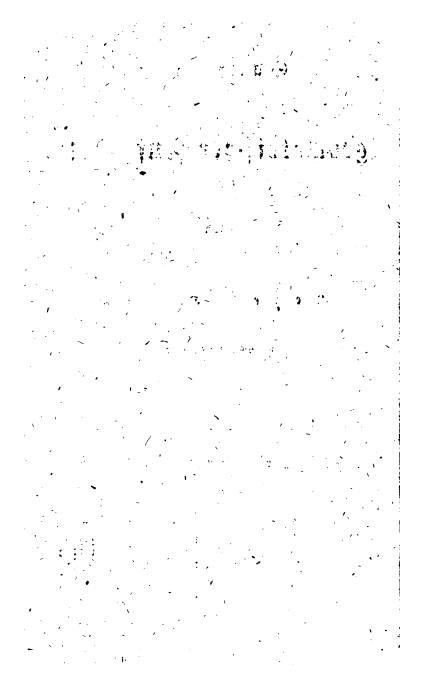


Hick of Sei Malian 2-5-29 18998

Borrebe

Ueber ben 3weck und Plan biefer geometrischen Sammlung im Allgemeinen habe ich mich schon in der Borrebe jum ersten Theile hinlanglich erklart. Dier also nur etwas Weniges über das, was diesen zwepten Theil insbesondere betrifft.

Die Spharische Trigonometrie, Die Stereometrie,



20 - 34, AEJ Heber ben Zweck und Plan biefer geometrischen Sammlung im Allgemeinen, habe ich mich schon in ber Borrebe jum ersten Theile hinlanglich erklart. Dier also nur etwas Weniges über bas, was biesen menten Theil insbefondere betrifft.

Die spharische Trigonometrie, die Stereometrie,

und einige andere, damit in Berbindung stehende Sesgenstände, haben größtentheils den Stoff dazu bergesgeben; jedoch nur in so weit, als die bloße Elemenstar. Geometrie zum Berstehen hinreicht, und weder die Renntniß der höheren Geometrie noch der Diffestentialrechnung daben vorausgesetzt werden darf. Der sollgende Theil, der vielleicht, wenn gewisse Umstände es nothig machen sollren, auch noch unter einem bes sonderen Titel erscheinen durfte, wird es mit der höhern Geometrie und der Goniometrie zu thun baben.

Unter ben Aufgaben, welche hier vorkommen, burfte man fehr viele neue finden; aber auch viele andere, benen zwar das Pradifat der absoluten Neusbeit nicht beigelegt werden kann, die fich aber boch wenigstens burch eine einfachere, ober allgemeinere Behandlungsart, als die gewöhnliche, auszeichnen.

Bu beerBeivenung bee Rorper, weiter boit in veren Arten regulater Figuren eingefthieffent wetch wurde ich burch eine vortreffliche analytische Abban lung von Euter über Die tegularen Ropper vera lagt. *) Ich wandte feine Methode, mit gluckliche Erfolge, auch auf jene Rorper an, beren Unter dung aber, wie fich leicht erachten lagt, mit w größeren Schwierigfeiten vertnupft ift. Die Aufga 6 155 verdient, wegen der Allgemeinheit ber Aufl lung und ber febr einfachen tombinatorischen Roem melche baselbft gefunden worben, einige Aufmertia feit. Die Berechnung bes Inhaltes ber von fibief Bierecken eingefchloffenen Korper, tann in vielen Ri len, besonders in der Stereotomie von Rugen sen

^{*)} De corporib. regularib. per doctrinam sphaeries determinatis, Act. Petrop. 1778. P. I. p. 3.

nacht bies sim so mehr, ba bie Formel, welche f. 289 geftenden worden, diese Berechnung fohr leiche mecht:

J. 1. 11 .5

Berfin, bin 1. Oftober 1806.

analysistic step of the origin

e enforcement comp. , accession de l'ex-

The second particles of the second

ing. September 1985 participate of the second

The state of the s

रम्बर्धि व व र र र र र र र र र र र र र

ente contrata en la comparción de contrata de la c

agening to a refer

Inhalt.

and the second of the second

nig grander clie

	,	
	The state of the s	' <u>::</u>
	Comment of the man condition of the cond	Ž.
	ar Same in the Committee States to the	
_: (Confirmitionen im Raume vermittelft ber Projet.	,
T.	cionena im Maume bermitteth ber brolet.	
	Storien and his control of	
II.	Analytifche Ableitung der fpharifch i trigonometris	
	fden Formeln. Gerte 13 Bei G. fen gen 200 .	#1
III.	Anwendung der vorbergebenden Formeln auf die	
	fobarifche Erigonometrie.	56
שו	Biddeninhalt der febartiden Drevede und Biefede	
	The first of the part of the p	Á
V.	Einige Anwendungen der fpharifchen Erigonometrie	,
	auf Beldmeffer : Aufgaben	77
VI.	Aundamentalfage aus ber Lebre von ben edigen	٠
	Rorpern, jum Behufe bes Folgenden	89
VI	. Aufgaben får Parallelepipeden, Prilmen, Ppramis	
V	ben, und einige andere einfache Rorper.	100
AT	II. Regnidre Körper	197
IX	. Sorper, welche won reguldren Figuren zweperley	
	Art begrängt werben.	150

1

	art begrangt werden	170
XI.	Rorpet, welche von lauter Momben begrangt	•
	merben. :1 ; w. G. u	86
XI.		196
XI	II. Munde, ringformige und trumme Rorper	228
XI	V. Bom Marimum und Minimum, in fo fern dies	
.s:ha	Jer Gegenftand jur Elementar Geometrie gebork	•
•	Conficultionen im Rauere vern ber Profet	.1 1
χV	V. Sleichungen für die gerade Livie, die Chenearitoni:	,
.·	Raterifche Al. flung ber sphaffige erigonoveteis	04 1
ĮV	VI. Relationen swifthen ben Coordingten brenge	
_	Puntte. Gebrauch berfelben ben ber Auflösung eis sid fun gloma in in an enradige ein angenen in angenen in	H
36	niger, die brebfeitigen Phramiden betreffinden Auf	341
		71 361
7.X. \	vii. Emige vermiichte mulgaven und regriage	50 L
		7
77	ំ ស្នាស់ ស្	V.
77	and seems of the s	
,	and definition of the state of	
,	Roger Berton et al. 2007 2007 2000 per ben ben ben ben ben enfran	Ā
පි	Ligar Karrent (100) a <u>nd der gebre</u> won den ackisen Keingrans von 28 gabe das (100) den generalt. Na Kulgaben die Kreitara, hooden, Heinstein Tarant.	Ā
00 00	Legarbarrent des a <u>us des vers</u> e son den cofficer Respundent de dische des des des dens, de la Nutricien de des des des des des des des des Leurs and verticients during sons des des	V
පි	Lyardinent the a <u>ns del del ren</u> e rea den ecfisch Keiten von ed hake des the dent. No Kulyaren de delenation, westen Heiten Thank best and recht electerishisch norther.	V
399 1.00 1.77	Lyardent des a <u>ns der rin</u> e opn den eckisch Keigenden der des base des den den geleichen Ergenstelle Aufgelen der den geleichen Ergenstelle Aufgelen der der den gestellte Fellen der geleichen Gestellte Fellen der gestellten bei der gestellten bestellten bei der gestellten bei der gestellten bestel	V
00 00	Lyardinent the a <u>ns del del ren</u> e rea den ecfisch Keiten von ed hake des the dent. No Kulyaren de delenation, westen Heiten Thank best and recht electerishisch norther.	W / W / W / W / W / W / W / W / W / W /

X. Ropper, welche von reguldren Figuren

Geite.

I. Construktionen im Raume vermittelft ber Projektionen.

Einleitung.

S 1.

Confruttionen im Raume neme ich biejenigen Confruttionen, welche nicht in einer und derfelben Seene ausgerführt werden können, im Gegensaße mit denen, welche zu ihrer Ausführung nur einer Sbent bedürfen, und die ich aus diesem Grunde Confruttionen in der Sbene nennen will; die ersteren find in Beziehung auf die Körper das, was die testeren in Beziehung duf die ebenen Tiguren find; jene erfordern zu ihrer Darftellung dren Dimensionen, Lange, Greifte und Hohe, diese nur zwen, Lange und Breite.

Mit den Conftruktionen im Raume und ihrer Darftellung durch Beichnung, haben fich in den neuern Zeiten die Franzo, fen, namentlich Monge und Lacroix mit glücklichem Erfolge beschäftigt, und aus allen dahin gehörigen Lehren einen besondern Zweig der Geometrie geschaffen, welchen fie Geometrie descriptivo nennen. Einer ihrer Hauptgegenkinde ift die, in mehreren Cheilen der Baukunft, besonders ben den Geometrie II.

wölben, febr nuglide Conftruction ber Schnitte frummer Elden, worüber Monge in den Seances des écoles normales viele tief durchdachte Abhandlungen geliefert hat. Lacroir's Elementarwert: Essais de Géométrie, sur les plans et les surfaces courbes; ou élemens de Géométrie descriptive, seconde édition, 1802 *); empfiehlt sic vorzüglich durch seine Deutlichteit und durch die logische Anordnung des Vortrags.

9.

Die Lage eines Punktes im Raume ift gegeben, wenn man die Entfernungen dieses Punktes von dren Sbenen kennet, beren Lage bekannt ift, vorausgesest, daß diese Sbenen nicht parallel find.

Man bente fich bren Seinen von willtührlicher, nicht par ralleler Lage, welche ber Kurze wegen und um teiner Zeichnung zu bedürfen, durch E, E', E", bezeichnet werden sollen; ferner einen Punkt P, bessen mögen, woben es übrigens vorerft noch unbestimmt bleiben soll, ob dieser Punkt zur rechten oder zur linken Seite, ober oder unterhalb dieser Seinen liegt. Man stelle sich nun vor, es wären auf behden Seiten der Seine E, in der Entsernung d, zwen ihr parallele unbegränzte Seinen gelegt; in einer dieser benden Chenen liegen

*) Die erste Austage erschien 1795. Von diesem Werke ist so eben eine Nebersegung, unter folgendem Titel erschienen: "Wettere Ausführung zu Lacroir's Gemetrie, oder Nerfuch einer Geometrie über die ebnen oder frummen Oberflachen nebst Austangsgründen der Perspektive, zum besondern Gebrauch für Architekten, und für die ausubenden Mefkünftlek überhaupt. Aus dem Franzissischen übersett von E. M. Sahn, Königl. Preuß. Cammers Condukteut. Mit 10 Aupsertaseln. Verlin 1806, ben heinrich Frölich."

alebann nothwendig alle die Buntte, welche von der Chene Z un Abftand d haben, außerhalb berfelben teiner; unter biefer unendlichen Menge von Buntten befindet fich nun auch der Bunte P. Um ibn naber ju bestimmen, bente man fich groen andere unbegrangte Cbenen, welche, in ber Entfernung d', auf benben Geiten ber Cbene E' ihr parallel laufen. In cie ner diefer benden Sbenen liegt nun gewiß ber Buntt P; ba er aber auch in einer ber benben vorher ermabnten Ebenen Lie: gen muß, fo tann er, um bende Bedingungen gugleich gu er fullen, exirgends wo anders liegen, als in einer der vier Lie nien, in welchen fic bie vier Cbenen je zwen und zwen eine ander ichneiden. Alle Dunfte Diefer Linien baben bemnach Die Eigenschaft mit einander gemeir, daß fie von der Chene E den Abftand d, und von der Cbene E' ben Abftand d' baben. Aber. nicht alle Buntte Diefer Linien befigen auch gugleich Die Gigens icaft. baf fie von ber Ebene E" die Entfernung d" baben, welches die dritte Bedingung fur ben Buntt P ift. In Sin-Acht auf Diefe britte Bedingung muß ber Buntt P in einer ber benben Ebenen liegen, welche in ber Entfernung d" auf ben) ben Seiten der Ebene E" ibr parallel laufen, und folglich nothwendig in einem ber acht Puntte, in welchen biefe Cber nen jene vier Linien ichneiben. Jeber biefer acht Buntte eri fallt Die bren gegebenen Bedingungen; welcher barunter ber gefucte Buntt P fen, muß aus andern Umftanden entichieden werben.

\$ 3

Die leichtefte und einfachste Art ben Punkt P unter ben acht, im vorigen Serwähnten Punkten auszuzeichnen, ift die, daß man angiebt, auf welcher Seite einer jeden der bren Eber nen dieser Punkt liegen soll. In diesem Falle giebt es nam lich für jede der dren Ebenen E, E', E", anstatt zwerer pu-

rallelen Sbenen, nur eine, welche ben etforderlichen Abftand bat, und worin der Pankt P liegen kann; folglich in allem nur dren Sbenen, die in Betrachtung gezogen werden durfen. 3men derselben geben in ihrem Durchschnitte nur eine einzige gerade Linie, in welcher der Punkt P liegen kann, und der Durchschnitt dieser Linie mit der dritten Ebene giebt den Bunkt selbik.

Da in der Solge von diefer Bestimmung ber Puntte im Raume vermittelft dreper Cbenen baufig Gebrauch gemacht wird, so habe ich die Grande, worauf diefelbe beruhet, etwas umftandlicher aus einander gefest, als es ber zu behandelnde Gegenstand unmittelbar erforderte.

S ÁL

Ein noch einfacheres Mittel gur Erreichung unferes 3mes des, die Lage eines Punttes im Raume zu bestimmen, geben uns die Projettionen an die Sand.

Projektion eines Punktes auf einer Ebene, heißt ber Punkt, worin ein Perpendikel, aus dem zu projectenden Punkte auf der Some herabgelaffen, diese trifft. Die Lange des Perpendikels zwischen dem gegebenen Punkte und der Sobe ne ift die Hohe beffelben über der Sone.

Sind die Projektionen eines Aunktes auf zwei Ebenen von bekannter Lage im Raume gegeben, so ift es auch der Punkt Kibft.

Denn, wenn man aus der Projektion in der einen Sbene ein Perpendikel auf dieselbe errichtet, so gehet dieses Perpendikel nothwendig durch den gegebenen Punkt; errichtet man aus der Projektion in der anderen Sbene ein Verpendikel, so gehet auch dieses Perpendikel durch den gegebenen Punkt; dies ser Punkt liegt folglich zugleich in zwen Linien von bestimmter Lage; er ist demnach kein anderer als der Durchschnittes punkt dieser Linien, und baber bekannt.

Wenn man von allen Puntten einer beliebigen geraben Linie AB (Fig. 1) auf eine, der Lage nach gegebenen Seine LMNO, Perpondikel herabickt, so liegen alle Punkte, in welchen diese Perpondikel die Seine treffen, in einer und derselben Linie ab; denn alle diese Linien liegen in einer Seine, welche durch AB gehet und auf LMNO perpondikular stehet, folglich auch die Punkte, worin sie Sie Seine LMNO tressen; diese Punkte liegen demnach in beiden Seinen augleich, und daher nothwendig in der Durchschnittslinie derselben, also in einer geraden Linie.

Die Linte ab, welche durch die Projektionen aller Punkte einer anderen geraden Linie AB auf der Stene LMNO gehet, heißt die Projektion der Linte AB auf dieser Stene.

Da zwen Buntte die Lage einer geraden Linie bestimmen, so braucht man nur die Projektionen zwener Punkte einer geras ben Linie zu kennen, um die Projektion derfelben zu finden.

Stehet also eine gerade Linie auf einer Projektions, Ebene perpendikular, so ift ihre Projektion ein Punkt, und zwar ders jenige, worin die Linie diese Sbene trifft.

Sind die Projektionen (Fig. 2) ab, a'b', einer geraden Linie AB auf zwen Sbenen LMNO, LMPQ, von bekannter Tage gegeben, so ift auch die Lage dieser Linie gegeben. Deun man lege durch die eine Projektion ab eine Sbene auf LMNO perpendikular; alsdamn gehet diese Ebene nothwendig durch die Linie AB. Legt man eben so durch die andere Projektion a'b' gine Sbene auf LMPQ perpendikular, so gehet auch diese Sbene durch die Linie AB. Die gesuchte Linie AB ift also keine andere, als die Durchschnittslinie dieser Sbenen.

Das hier Gesagte gilt immer, Die Lage der Ebenen LMNO, LMPQ, fen welche fle wolle. Des Gebrauches wer gen, ben man gewöhnlich von den Projektionen macht, ift es indessen rathsam, auch hier diese Seenen auf einander perpens dikular anzunehmen. Es ist aber leicht zu tegreisen, daß, wenn man die Seene LMPQ in ihrer aufrechten Lage so zeichnen wollte, wie sie sich dem Auge darstellt, die darin gezeichneten Anion und Figuren ganz andere Perhältnisse und Lagen bes kommen würden, als sie wirklich haben. Da es nun ben den Projektionen mehr auf eine genaue als anschausiche Darstellung ankommt, so stelle man sich vor, die Seene LMPQ drehe sich um die knie LM so lange, die sie mit LMNO in eine Seene zu liegen kommt, und zeichne alsdann in LMP'Q' alles so, wie es die Regeln der Projektionen erfordern.

Mehrerer Deutlichkeit wegen foll die Seene LMNO die borigontale, und LMPQ die vertitale Seene heißen, obgleich biese nicht vertital und jene nicht horizontal zu senn braucht.

Es seven a und a' die horizontale und vertikale Projektion des Punktes A (Fig. 2); alsdann ift die Ebene aAa'C, welche durch die Perpendikel Aa, Aa' gelegt wird, auf bene den Gebenen zugleich perpendikular, folglich auch auf ihrem ges meinkhaftlichen Durchschnitte LM, und daher find auch die Linien aC, a'C, auf LM perpendikular. Indem nun die verstikale Soene sich um LM drebet, bleibt die Linie Ca' immer auf LM perpendikular, sie ist es also auch dann noch, wenn die Ebene LMPQ in LMP'Q' und Ca' in Ca" fallt. Heraus solgt demnach, daß die Linie Ca" in der Berlängerung von Ca liegt; auf die namliche Art verhalt es sich auch mit den Linien Ob", Dh, sür seden anderen Punkt B. Durch diesen Umstand wird das Auftragen der Projektionen um vieles ers leichtert; denn hat man einmal die horizontalen Projektionen einer gewissen Anzahl Punkte gesunden, so darf man nur von

jedem dieser Aunkte auf LM ein Perpendikel fallen; in der Berlangerung dieses Perpendikels liegt alsdann die vertikale Projektion jenes Hunktes. Dies gilt auch umgekehrt, wenn die vertikale Projektion gegeben ift, und die horizontale gestunden werden foll.

\$ 7

Aufg. Die horizontale nebst der vertikalen Projektion einer geraden Linie ist gegeben: man foll die Lange dieser Linie finden.

Aufl. Es feven (Fig. 2) ab, a'b', die gegebenen Projets tionen der Linie AB, deren Ednge gesucht wird.

- 1) Man siehe aus A die Horizontale AE, welche die Bertitale BE in E trifft; aus E ziehe man die Horizontale Eo, welche die Bertitale b'D in o trifft, und hierauf die Linie a'c.
- 2) Alsdann find DE, Ab, AC, Parallelogramme, und das ber cD = Eb = Aa = a'C. Da also a'C ber eD gleich und parallel ift, so ift auch i'e der CD gleich und parallel, folglich auf b'D perpenditular.
- 3) Da ab gegeben ift, so ift auch CD = a'n gegeben. Man tennt bemnach in bem rechtwinklichten Drepede a'eb' awen Seiten a'b', a'e, folglich auch die dritte b'o = BE.
- (4) In dem rechtwinklichten Orenecke AEB kennet man bemnach die benden Catheten BE und AE (= der gegebenen Projektion ab), folglich auch die Hopothenuse AB. hieraus ergiebt fich folgende Construktion.

Es fet LM (Fig. 3) die Durchschnittelinie der horizontatien und pertifalen Sbene, ab die horizontale, und a"b" die auf die Horizontalebene reducirte vertifale Projection. Man ziehe die Linie b"b, welche mit der eben so bezeichneten Livnie in Fig. 2 übereinstimmt, und daber auf LM perpendickular kehet; durch a" ziehe man die Horizoneale He, welche

der Linie b'b in o begegnet; nehme eH = ab, und glebe bie Hypothenuse b'H, so wird diese Linie der gesuchten an Lange gleich seyn.

s 8

Aufg. Es sind die Projektionen eines Punktes und einer Linie gegeben: man foll die Projektionen einer zwere ten Linie finden, welche der ersten parallel lauft, und durch den gegebenen Punkt gehet.

- Aufl. 2) Die gesuchte Linie ift der gegebenen parallet, folglich find auch die Bertikalebenen, welche durch diese Linien geben, einander parallet, mithin auch die Durchschnittslinien dieser Seenen mit der horizontalen, b. h. die Projettionen der gesuchten und der gegebenen Linie. Auf eine ahnliche Art vershalt es fich mit den vertikalen Projettionen.
- 2) Die gesuchte Linie soll burch ben gegebenen Punkt ges ben; es muffen alfo auch ihre Projektionen durch die respektionen Projektionen dieses Punktes geben. hieraus ergiebt fich folgende Conftruktion:

Wenn ab, a"b" (Fig. 4), die Projettionen der gegebenen Linie, d, d", die Projettionen des gegebenen Punttes find, so siehe man durch den Puntt d die Linie ef der ab, und durch den Puntt d" die Linie e"f" der a"b" parallet; alsbann wers den ef und e"f" die gesuchten Projettionen sepn.

9

Aufg. Es sind die Durchschnittslinien einer Ebene mit den beyden Projektionsebenen, nebst den Projektionen eines Punktes gegeben, durch den eine zweyte Ebene der vorigen parallel gelegt ist: man soll die Durchschnittslinien dieser zweyten Ebene mit den Projektionsebenen finden.

Aufl. 1) Die respettiven Schnitte ber gesuchten Stene muffen ben respettiven Schnitten ber gegebenen Stene parale let fenn; benn diese Schnitte flut, qu gwen und gwen betrach.

tet, die Schnitte zwener Sbenen durch eine britte. Romite man daber für jeden derfelben nur einen einzigen Punkt bestimmen, durch welchen er geben muß, fo ware die Aufgabe aufgeloft.

- 2) Es fenen AB, BC (fig. 5), die Schnitte der gegebernen Ebene mit ben Projettionsebenen; LM wie immer die Durchschittslinie diefer Sbenen; g", g, die Projettionen des gegebenen Punttes; DE, EF, die Schnitte der gesuchten Sbene.
- 3) Man bente fich in der gesuchten Sbene durch den geges benen Punkt eine Horizontalinie gezogen, die der Kurze wer gen. I beifen mag; die Projektionen derselben werden gesunden, wenn man durch den Punkt g" die Harizontale g"F zier bet, und durch den Punkt g eine gerade Linie gl ber AB parallel.
- 4) Berlangert man die Linie gl fo weit, die fie den Schnitt LM in I trifft, fo ift diefer Buntt die horizontale Projection des Durchichtepunttes der Linie L mit der Bereikalebene; der erwähnte Durchichnitispunkt kann also nirgends wo anders liegen, als in der Bertikalen IF, welche durch I gehet.
- 5) Da er nun aber auch in g"F liegen muß, fo tann es tein anderer fenn als ber Durchschnittspuntt F der Linien IF, g"F; und diefer Punkt liegt somohl in der vertitaten, als in der gesuchen Ebene, folglich in dem Schnitte diefer Ebenen.
- 6) Man giebe baber burch ben Puntt F bie Linie FE ber CB parallel, so ift diese Linie ber Schnitt ber gesuchten Stene mit der vertikalen; giebet man ferner aus E, wo sie bie LM trifft, die Linie ED ber AB parallel, so hat man auch ben Schnitt dieser Stene mit der horizontalen.

Unmert. Unftatt, wie hier geschehen, in ber gesuchten Sbene eine Porizontale zu ziehen, hatte man auch ber-vertifa, lem Sbene eine Parallele ziehen tonnen; alsbann murbe man burch abnliche Schluffe folgende Construction ethalten haben:

Man siebe aus g ber LM die Linie gD parallel; aus dem Punkte g" siehe man die Linie g"H der BC parallel, welche, hinlanglich verlangert, die LM in H schneibet; aus H errichte, man auf LM das Verpendikel HD, welches die gD in den Punkt D schneibet; siehet man bierauf durch D die Linie DE der AB parallel, und aus dem Punkte. E, wo ste die LM trist, die EF der BC parallel, so sind wieder DE und EF die gesuchten Schnitte.

§ 10.

Aufg. Die Schnitte einer Ebene mit den berden Projektionsebenen nebst den Projektionen eines Punktes sind gegehen: man soll die Lage der Projektionen eines Perpendikels sinden, welches aus dem gegebenen Punkte auf die gegehene Ebene herabgelassen worden.

Aufl. 1) Es fepen AB, BC, (Fig. 6), die gegebenen Schnitte Der Ebene mit der horizontalen und vertifalen Pro, jettionsebenes d, d", die gegebenen Projektionen des Punktes, aus welchem das Perpendikel gezogen merden foll.

- 2) Man siebe aus d auf AB das Perpendifes dg, und aus d" auf BC das Perpendifes d"g"; so geben die kinien dg, d"g" die gesuchte kage der Projektionen des Perpendifels.
- 3) Denn benkt man fich durch dieses Perpendikel eine Bers, sikglebene gelegt, welche, der Deutlickeit wegen, E heißen mag, so fishet solche auf der Horizontalebene perpendikulär; aber auch auf der Ebene ABC (Elem. XI. 18), folglich guf hem Schnitt AR dieser Schene mit der horizontalen (Elem. XI. 19). Da also AB auf der Schene E perpendikulär siehet, so siehet sie auch auf dem Schnitt dieser Schene mit der Horizontalebene, perpendikulär; dieser Schnitt ist aber nichts anders, als die Projektion des Perpendikels auf der Horizontalebene; und da dieselbe auch durch den Punkt d gehen muß, so ist der die gesuchte Projektion.

4) Auf die namliche Art wird bewiesen, bas augu bie gesuchte Projection auf der Bertitalebene fen.

§ 11.

Aufg. Unter denfelben Voraussenungen, wie die in der Aufgabe des porigen l'e, die Projektionen des Punktes zu finden, wo das Perpendikel die Whene trifft.

- Aufl, 1) Es fev, wie im vorigen &, E die Bertifale ebene burch das Perpenditel; ferner heiße L die Linte, in welcher diese Gene die Shene ABC schneibet; alsbann ift o ein Puntt Diefer Linie.
- 2) Man falle aus e auf LM das Perpenditel eE, so ift E die Projettion diefes Punttes auf der vertifalen Projettionse . ebene, und folglich E ein Punti in der vertifalen Projettion der Linie L.
- 3) Man verlangere dg, bis fie die LM in F trifft, und errichte aus F auf LM das Perpenditel Ff", so ift Ff" der Schnitt der Schnitt der Schnitt der Bene E mit der vertifalen Projektionsebene. In dieser Linie liegt demnach der Punkt, in welcher die Linie Liegt vertifale Projektionsebene trifft; dieser Punkt liegt aber auch in der Linie BC, folglich in dem Durchschnittspunkte f" dieser Linien.
- 4) Aus 2 und 3 ergiebt fic, bas f"E die vertitale Profestion der Linie Lift; in ihr fiegt demnach auch die Profestion des Punttes, in welcher das gesuchte Perpenditel die Sbesne ABC trifft; die Profession dieses Punttes liegt aber auch nothwendig in der Linie d"g"; es kann also kein anderer als der Puntt g" sonn; g" ist demnach die pertitale Projektion des gesuchten Vunttes,
- 5) Um un auch die horizontale Projektion zu finden, gie, be man g'g auf LM perpendikular; aledann ift der Punkt g, wo diefe Linie die de schneidet, die horizontale Projektion des gesuchten Punktes (§ 6).

Buf. Die Linien d'g", dg, geben die Lange ber Projektionen desjenigen Theiles des Perpendikels, welcher awifchen
dem gegebenen und dem gesuchten Punkte enthalten ift.

J 12.

Aufg. Die Projektionen einer geraden Linie und eis net Punktes find gegeben: man foll eine Ebene konftruiren, welche durch ben gegebenen Punkt gehet, und auf der ges gebenen Linie perpendikular ftehet.

- Aufl. 1) In f 10 wurde gezeigt, daß die Projektionen einer Linie, welche auf einer Sbene perpendikular Rebet, auf den respektiven Schnitten dieser Sbene mit den benden Presjektionsebenen perpendikular fieben muffen. Es kommt also hier bloß darauf an, für jeden dieser Schnitte einen Punkt anzugeben; durch welchen er gehet, weil aledann diese Schnitte bekannt find, wodurch die Lage der Sbene bestimmt wird.
- 2) Man bente fich zu bem Ende in der gesuchten Sbene burch ben gegebenen Punkt eine Horizontallinie bis zur vertiskaten Profestionsebene gezogen; diese Linie will ich, der Rarge wegen, L nennen.
- 3) Es senen nun d, d" (Rig. 7), die Projektionen des Teggebenen Panktes, ab, ab" die Projektionen der gegebenen Linte. Man ziehe aus d" die unbegranzte Horizontale d"G, und aus d auf ab das Perpendikel dH, welche der LM in H begegnet; alsdann ist d"G die vertikale, und dH die horizontale Projektion der Linie L; ferner, H die horizontale Projektion des Punktes, wo diese Linie die vertikale Projektions. ebene trifft.
- 4) Diefer Punte liegt daber nothwendig in der Linie HG, welche aus H auf LM perpenditular errichtet ift; aber auch in d"G; folglich in G, wo sich diese Linien schneiden.

- 5) Der Bunte G liegt bemnach in ber gesuchten und in ber vertif ilen Projektionsebene zugleich, folglich in dem Schnitzte dieser Chenen. Man erhalt demnach diesen Schnitt, wenn man FC auf a"b" durch ben Punkt G perpendikular ziehet.
- 6) Ziehet man nun aus C, wo die Linte FC die LM trifft, die Linie CE auf ab perpenditutar, fo ift CE der zwenste von den gesuchten Schnitten, und demnach ECF die ges sachte Ebene.
- Buf. Bollte man den Puntt tonftruiren, wo die geges bene Linie die gesuchte Chene triffe, so durfte man nur gerade so verfahren, wie im § 11 gelehrt worden.

S 13.

Aufg. Die Schnitte zwever Ebenen mit den beydent Projektionsebenen find gegebent man foll die Durche schnittsline dieser Ebenen konftruiren.

- Aufl. 1) Es fepen (Fig. 8) ABC, DEF, die benden Ches nen, deren Schnitte mit der vertifalen Projettionsebene BC, EF, so wie die mit der boripontalen, AB, DE, gegeben find.
- 2) Die Puntte H, G, worin fich die Linten BC, EF, und AB, DE, schneiden, find den beiden Seinen geweinschaftlich, und liegen demnach in der Durchschnittslinie berfelben i fie lies gen aber auch in den Projektionsehenen; folglich ift H ein Punkt der wektikalen, und G ein Punkt der horizontalen Projektion.
- 3) Ziehet man nun die Linieu H1, GK, auf LM perpensdifular, so ift I die horizontale Projektion des Punktes H, nud K die vertikale Projektion des Panktes G.
- 4) Aus 2 und 3 folge, das G, I, die verigontalen, und H, K, die vertitaten Projettionen der benden duferften Punt, te des gesuchten Schnittes find; folglich find GI, HK, die gessuchten Projettionen.

14

Aufg. Drey Ebenen find burch ihre Schnitte mie

ben begoen Projektionsebenen gegeben: man foll ben Punkt konstruiren, welchen biefe brey Ebenen gemeins ichaftlich haben.

Aufl. Der gefuchte Punkt muß nothwendig in den bren Durchschnittslinien diefer Ebenen zugleich liegen; man darf daher nur die Projektionen bon irgend zwen diefer Durch, schnittslinien konftruiren, so giebt der Punkt, wo fic bie ben, ben vertikalen Projektionen schneiben, die vertikale, und der Punkt, worin fic die benden horizontalen Projektionen schneis ben, die horizontale Projektion des gesuchten Punktes.

¥ 15.

Aufg. Durch drey Puntte, beren Projektionen geger ben find, ift eine Wbene gelegt worden: man foll ihre Schuitre mit ben Projektioneebenen bestimmen.

- Aufl. 1) Es feben a, b, c (Fig. 9), die bortzontalen, und a", b", c", die vertifalen Projectionen der dren gegebenen Puntte, durch-welche die Sebene gelegt werden foll; es heiße ferner, der Rurze wegen, L die Linie, welche die Puntte, der ren Projectionen a, b, a", b", find, verbindet, und L' die Linie, welche die beiden Puntte verbindet, deren Projectionen a, c, a", c" find.
- 2) Man siehe die Linien a"b", a"c", und errichte aus den Punkten H, F, wo sie die LM schneiden, die Perpendikel HA, FD; ziehe hierauf ab, ac, und verlängere diese Linien, bis sie jene Perpendikel in A, D schneiden; alsdann ift A der Punkt, wo die Linie L, und D der Punkt, wo die Linie L' die horiz dontale Prejektionsebene schneidet. Zieher man daber durch A und D die kinie AB, so ist diese Linie der Schnitt der gesuchten Seene mit der horizontalen Projektionsebene.
- 3) Um nun auch den vertikalen Schnitt gu bestimmen, durfte man nur die horizontale Projektionsebene mit der verz-

iffelen vertaufden; man tann aber auch auf folgende Art verfahren.

- 4) Man stehe aus a die aG der AB, und aus a" die a'E der LM parallel; aus dem Punkte G, wo die erstere die LM schneidet, errichtet man das Perpendikel GE. welches die zweht te in E schneidet, und ziehe durch B und E die Linie BC, so bat man den gesuchten Schnitt.
- 5) Denn bente man fich burd ben Punte, beffen Projetstion a ift, in der gesuchten Sbene eine Linie ber AB parallel gezogen, so find aG, a"E die Projektionen dieser Linie, folge lich ift E der Punkt, worin diese Linie die vertikale Prossektionsebene trifft, und daher auch ein Punkt des Schnittes der gesuchten Sbene mit der vertikaten, woraus das Uebrisge folgt.

§ 16.

Jufg. Die Schnitte zwever Ebenen mit den bevoent Projektionvebenen find gegeben: man foll den Winkel, Den fle einschließen, konftruiren.

- Aufl. 1) Es feren ABC, ADE (fig. 10), die benden Stenen; BC, DE, ihre Schnitte mit der vertitalen, AD, AB die mit der horizontalen Projettionsebene. Es feb ferner AF die nach § 13 bestummte horizontale Projettion ihrer Durchs schnittslimie.
 - 2) Man nehme auf dieser Durchschnittslinie irgend einest Bunkt an, der K heißen mag, und lege durch diesen Punkt eine auf derselben perpendikulare Sbene, welche die bepden ger gebenen Sbenen in zwen geraden Linien schneidet, die den ger suchten Winkel einschließen. Sie schneidet serner die Horizons talebene in einer Linie, welche, als der Durchschnitt zwenet auf der Sbene Aff" perpendikularen Sbenen, auf dieser, und folglich auf Af perpendikular fiehet.

- 3) Diefer lettere Schnitt sen gh., für welchen man jede beliebige auf AF perpendikulare Linie annehmen kann. Man felle fich nun vor, das Oreped, welches durch die in 2 erzwähnten dren Linien eingeschlossen wird, drebe fich um die Linie gh., so bleibt ben dieser Orehung der Punkt K beständig in der durch AF gelegten Bertikalebene, und sällt endlich auf AF selbst in irgend einen Punkt I. Der Winkel glie ist als dann der gesuchte Winkel. Um diesen Winkel zu konstruiren, bedarf es weiter nichts, als die Hohe der Orenecks il zu finden.
- 4) Bu bem Ende errichte man in F das Perpenditel Ff = Ff", siehe Af, und fälle ik darauf perpenditular, so ift ik = iK = il. Man mache daber il = ik, und ziehe die Linien lg, lh, so ist glh der gesuchte Wintel.

\$ 17

Aufg. Die Schnitte einer Ebene mit den berden Projektioneebenen find gegeben: man foll die Schnitte einer anderen Schne finden, welche mit der ersteren einen gegebenen Winkel einschlieft.

Aufl. Um diefe Aufgabe aufgntofen, braucht man nur bas Berfahren im vorigen S umgutebren.

Es seyen (Fig. 10) DA, DE die Schnitte ber gegebenen Ebene mit den benden Projektionsebenen, A und f" zwen will, kührliche Punkte auf benselben. Man fälle auf LM aus f" das Perpendikel f"F, und ziehe AF; sus F errichte man in der Horizontalebene auf AF das Perpendikel Ff. = Ff", und ziehe Af. Man nehme nun auf AF irgend einen Punkt i an, sälle aus demselben auf Al das Perpendikel ik, und errichte zugleich das unbegränzte Perpendikel gh, welches die AD in g schneidet; mache il = ik, ziehe gl, und lege an diese Liene in 1 einen, dem gegebenen gleichen Winkel glitz durch den Punkt h, wo die Linie lie die gh schneidet, und durch den Punkt

Bankt A giebe man die Linie AB; diese Linie ift ber gesuchte borizontale Schnitt. Um ben vertikalen zu finden, barf man unt durch B und fu die Linie BC gieben.

J 181

Aufg. Co find drev ebene Winkel gegeben: man foll aus benfelben einen korperlichen Winkel konftruiren.

Aufl. 1) Es seh LM (Fig. 11.), wie gewöhnlich, ber Schnitt ber beiden Projektionsebenen. Aus irgand einem Punkte A dieses Schnittes, errichte man in der horizontalen Projektionsebene das Perpundiket Aa von willführlicher Länge; und lege daran einen Winkt AaB, welcher einem der gegebenen gleich seh; an Aa und aB lege man die beiden anderen gegebenen Winkt AaC, Bac. Wenn C der Punkt ift, wo die Liv nie aC die LM trifft, mache man ac = aC, falle aus c auf aB das Perpendikst od, welches verlängert die LM in E trifft.

- a) Man ftelle fich nun por, ber Mintel Bac brebe fich um bie Linie aB, und ber Mintel AaC um bie Linie aA, so lange, bie die Linien aC, ac, folglich auch die Poutte C, c, auf einander fallen und so ben gesuchten torperlichen Wintel bilden. Die Linien do, AC, beschreiben ben dieser Drehung awen Sbenen, die bende auf ber horizontalen Projektionsebene perpenditulde Reben, und solche nach den Richtungen der Linien cE, CE schneiden.
- 5) Der Punkt E ift diesen bepden vertikalen Seenen gemeinschaftlich; er liegt folglich in der vertikalen Burch, ichnittalinie dieser Ebenen; er ift deminach die horizontale Projection des Punktes, worin C, o zusammen treffen. Die Linie all ift folglich die horizontale Projection der oberen Kante des torverlichen Winkela, welche durch die Bereinigung der Linien ac, all erzeugt wird.
 - 4) Der Panti, word C, o fic verginigen, liegt in ber Gemetrie II.

Peripherle des Kreifes; welchen AC ben der Umdrehung bes schreibt. Denks man fich daber die Seine dieses Kreises, wie gewöhnlich, auf die Hortwinkaledene gebracht; so ift das Perspendiel Eel die Hohe dieses Punktes über E; bemnach ift elle munkt ih der verkitalen Projektion der in 3 erwähnten, oberen Kante; und da auch A em Pankt in derselben ift, so ift Ael diese bertikale Projektion. Man hat also die bendent Projektionen dieser Bante; sie ift demnach gegeben.

Anmert. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn einer ber gegebenen Winkel größer ift, als die bewben anderen gufammen genommen, wie auch eine leichte Betrachtung der Figur zeigt; benn in diesem Falle wird ber Puntt E aufferhalb des Durche meffers DC falleti.

§ ig.

Aufg. Die horizonkalen und vertikalen Projektionen zwezer sich schneibenden Linien sind gegebent: man foll den Winkel konstruiren, welchen sie mit einander bilden.

- Aufl. i) Es seren (Fig. 12) ab, ac, die horizontalen, a"b", a"c", die verittalen Projectionen der Linien im Rausme; alsdann ift der Punkt a, wo fich die erfteren begegnen, die horizontale, und der Punkt a", wo fich die lesteren begegnen, die vertitale Projection des Durchschilttspunktes der beih, den Linien im Raume, und liegen folglich in einer Linie aGa", welche auf LiM perpendikular siehet (9 6).
- 2) Man bente fich bie benden Linten im Raume so weit verlangert, bis jede berfetben die Horizontalebene in irgend einen Punkt trifft. Um diese Punkte zu bestimmen, verlangere man, die Linten a'/b'', a''o'' so weit, bis fie die LM in die Punkte D und E treffen, welche die vertikaten Projektionen der gesuchten Punkte sind; diese Punkte klegen bemnach north, wendig in den ans D, E errichteten Perpendikeln, und solg,

lich ba, wo diese Linien von den respektiven horizontalen Pro-

- 5) Biebet man nun die Linie do, so bilbet biese Linie mit ben Speilen ber bepben gegebenen Linien, welche amischen ihrem Durchschnittspunkte und ben Punkten d, a liegen, ein Dreped, worin berjenige Winkel, welcher ber Seite do ger genüber liegt, ber gesuchte ift; es kommt also bloß barauf an, bieses Dreped au konftruiren.
- 4) Bu bem Enbe ziehe man af auf do perpendikular, und felle fich vor, dieses Oreved drebe fich um die Linie do, und sente fich fo jur horizontalebene berab. Die Spige dieses, Orevetals bleibt alsbann beständig in der durch al gelegsen Bertikalebene, und wird also irgendwo auf al oder ihre Verlängerung fallen, etwa in den Punts h: es bleibt demnach bloß hi zu bestimmen übrig.
- 5) die Linie hf ift in ihret natürlichen Lage über der Horizontalebene die Hypothenuse eines rechtwinklichten Orenedes, beffen eine Cathete die horizontale Projektion af, und die and dere die Hohe der Orenedsspipe über den Harizontalebene, ober die Linie a"G ift. Man darf daher nur noch GF = af machen, o"Fziehen, und hf = a"F machen, um das gesuchte Orened zu erhalten.
- 6) Ziebet man bemnach bie Linien ah, dh, fo ift dhe ber gefuchte Wintel.

\$ 20.

Aufg. Es find die Projettionen einer geraden Linie, und die Schnitte einer Whene mit den beyden Projettions, ebenen gegeben: man foll ben Wintel tonftruiren, well den die Linte mit der Ebene bilbet.

Anfl. 2) Man bente fich von irgend einem Punfte der gegebenen Einie auf ber gegebenen Sbene ein Perpenditel ber-

abgelaffen; alsbann ift ber Wintel, welchen diefes Perpenditel mit ter gegebenen Linie macht, ber Erganzungswintel bes gessuchen zu einem Rechten. Sat man bemnach jenen gefunden, so ift auch diefer bekannt.

- 2) Bu dem Ende nehme man auf den benden Projektionent der gegebenen Linie awen Punkte an, welche in einer und derfelben auf der Durchschnittslinie der Projektionsebenen perpendikuldren Linie liegen, und ziehe von diesen Punkten auf die gegebenen Schnitte der Ebeite mit den Projektionsebenen Berpendikel; so And diese Perpendikel die Projektionen eines im Raume, aus einem Punkte der gegebenen Linie auf der Ebene gefällten Perpendikels (§ 10).
- 3) Die Aufgabe ift alfo darauf gurudgeführt, einen Wine tel an tonftruiren, ben zwei Linien einschließen, beren Projetstionen gegeben find, welches die Aufgabe des vorigen S's ift.

Aufg. Die Reigungswinkel zwezer fich schneidenden Linien gegen die Sorizontalebene find gegeben, wie auch der Winkel, unter welchem fie fich schneiden: man soll die horizontale Profektion dieses lentern Winkels konstruiren.

- Aufl. 1) Es fen A (Fig. 13) die horigontale Projettiont des Punttes, wo diese benden Linien fich schneiden; AB die hor rigontale Projettion eines seiner Schenkel. Konnte man nun die Projettion des andern Schenkels finden, so ware die Aufgabe aufgeloft.
- a) Man nehme AB fut ben Schnitt der Projektionsebessien an, ziehe aus A bie Bertikale Aa", und mache ben Witistel ABa" bem einen ber gegebenen Reigungswinkel gleich; ber Punkt a", wo fic die Linien Aa", Ba" schneiben, ift glebann nothwendig die Spipe bes Binkels, beffen Projektion man suche.
- 5) Man giebe nun aus a" an LM die Linte a"C unter bem Bintel ACa", welcher dem gweiten ber gegebenen Reis

gengewinkel gleich ift, und beschreibe aus A mit AC den Bosen Cdo; in diesem Bogen muß sich die gesuchte Projektion endigen. Es kommt also bloß darauf an, die Entsernung die: se Bunktes von irgend einem anderen, etwa von B zu bestimmen, oder, welches das Namliche ist, die Entsernung der Bunkte, wo die Schenkel des Winkels, dessen Projektion gessicht wird, die Horizontalebene tressen, Hieraus ergiebt sich das Uebrige der Construktion.

4) Man mache namlich Ba"D bem gegebenen Wintel gleich, mache a"D = a"O, und siefe BD; schneibe hierauf mit Bd = BD ben Bogen Con in d, und siehe Ad, so ist ber Bintel BAd die gesuchte Projektion.

Das Bisherige mag vorerft zu einer vorläufigen Renntnist beffen, worauf es ben ben Constructionen im Raume ankommt, hinreichen; die weitere Entwickelung dieses Gegenstandes, und intbesoudere die wichtige Anwendung auf die Schnitte krum, mer Flächen, kann erft in den folgenden Sammlungen ihren Plat finden, weil dazu eine Bekannischaft mit der toheren Gesmetrie erfordert wird, welche ich hier noch nicht voraus: isen darf.

II. Analptische Ableitung ber sphartschertigonomes trifchen Formeln.

§ 22.

Es fen ABC (Kig. 14) irgend ein sphärisches Dreved; S ber Mittelpunkt ber Augelstäche, su welcher daffelbe gehört, und aus diesem Hunkte die Halbmeffer SA, SB, SC gezogen, wiche mit dem Augelbrevede die sphärische Phramide SABC bilden, die von den dren Seitenstächen SAB, SBC, SAC eine Bichosen wird. Man laffe nun von trgend einer Spige des spharischen Drevedes, etwa C, auf die gegenüber liegende Seitenstäche SAB das Perpendikel CD herab; aus D, wo dieses Perpendikel die Seine trifft, siehe man DE auf SA, und DF auf SB perpendikular, und aus C die Linien CE, CF. Alsdami ift, wie bekannt, CFD der Neigungswinkel der Seinen SAB, SBC, und CED der Neigungswinkel der Genen SAC, SAB, Aus den Punkten E, D siehe man serner EG der DF, und DH der BB parallel,

Um bem Sedchtniffe zu Halle zu kommen, bezeichne man die inneren Wintel des spharischen Drepectes ABC; mit den, an ihren Spipen befindlichen großen Buchtaben A, B, C, und die ihnen gegenüber liegenden Seiten mit den antlichen kleinen a, b, c, 3. B. den Wintel ben A mit A, und die ges genüber liegende Seite BC mit a.

§ 23,

1) Wird ber Halbmesser ber Rugel, ber Leichtigkeit wei gen, = 1 gefest, so hat man;

CE = Sin. CA = Sin, b, SE = Cos, CA = Cos, b,

CF = Sin. CB = Sin. a, SF = Cos. CB = Cos. a.

Aus dem ben D rechtwinkeligen Drepede CDE, worin CED = A, erhalt man,

CD = CE Sin, CED = Sin, b Sin, A,

DE = CE Cos. CED = Sin. b Cos. A;

ferner, aus dem ben D, rechtwinkeligen Drenede CDF, wors in CFD = B,

CD = CF Sin, CFD = Sin, a Sin, B,

DF = CF Cos. CFD = Sin. a Cos. B.

Gest man die benden Ausbrude der Linie CD einander gleich, fo erhalt man die Gleichung

I. Sin. b Sin. A == Sin. a Sin. B.

- 2) Da SED = SGE = R, so if GSE + SEG = SEG + HED, solstid HED = GSE (= ASB); daher if, HD = DE Sin. c = Cos. A Sin. b Sin. c. Weberdies if audi.
- SG = SE Cos. ESG = Cos b Cos c. Da num auch SF = Cos. a = SG + GF = SG + HD; fo erhalt man die Gleichung
 - II. Cos. $a = Cos. b \cdot Cos. c + Cos. A \cdot Sin. b \cdot Sin. c$.
- 5) Die Formet I. giebe die Relation awischen awen Wintel und den ihnen gegenüher liegenden Seiten; die Formel II. die Relation awischen einer Seiten, den bepden andern Seiten, und dem Wintel, welchen fie einschließen. Diese bevoen Glebchungen find hinreichend, um alle übrigen, welche in der spharischen Trigonometrie vordommen, daraus zu entwisteln. Dierzu dient besonders der; aus der gewählten Bezeichnung entspringende, vortheithafte Umftand, daß man in jeder Siedung, welche eine Relation zwischen den Winteln A, B, C und den Seiten a, b, a ausdruckt, die ersteren auf alle mogeliche Arten mit einander vertäuschen kann, wenn man nur mit den letzten eine chnliche Vertauschung vornimmt; und z. wenn B für A gesest wird, auch zugleich b für a sest.

24.

Die gehörige Bertaufdung ber Buchftaben in ben Gleischungen I. und II. bes vorigen S's giebt fogleich, wenn biefe bepben noch mit jugezogen werden, folgende feche;

Sin. a Sin. B = Sin. b Sin. A Sin. a Sin. C = Sin. c Sin. A Sin. b Sin. C = Sin. c Sin. B

Cos. a = Cos. b Cos. c + Cos. A Sin. b Sin. c Cos. b = Cos. a Cos. c + Cos. B Sin. a Sin. c ; [B]

Cos. c = Cos. a Cos. b + Cos. C Sin. a Sin. b J

Man fege ben Berth bon Cos. a aus ber erffen ber Gleisdungen [B] in die benben anderen; Dies giebt:

Cos, b = Cos, b Cos, c² + Cos, A Sin, b Sin, c Cos, c + Cos, B Sin, a Sin, c;

Cos. c = Cos. c Cos. b2 + Cos. A Sin. b Sin. c Cos. b + Cos. C Sin. a Sin. b3

eder wenn 1 - Sin. c? fur Cos. c4, 2 - Sin. b2 fur Cos. b8 gefest, und hierauf durch Sin. c und Sin. b dividire wird,

Cos. B Sin. a = Cos. b Sin. c - Cos. A Sin. b Cos. cCos. C Sin. a = Cos. c Sin. b - Cos. A Sin. c Cos. b

Man multiplicire die zwente dieser Gleichungen mit Cos. A. addire sie hierauf zur ersten, und setze 1—Sin. A. für Gos. A. bierdurch entstebet :

Sin, a (Cos. B. + Cos. A Cos. C) = Sin. A. Cos. b Sin.c. Beun hierin für Sin. c. Sin. A fein Werth Sin. a Sin. C aus der zwenten der Gleichungen (A) \$ 24 fubstituirt wird, sa etc halt man endlich:

Cos. B = - Cos. A Cos. C + Cos. b Sin. A Sin. C.

\$ 26.

Durch die Berbindung diefer Gleichung mit den zweinen, durch die Bertaufdung ber Buchkaben baraus abgeleitetene ergeben fich folgende bren Gleichungen;

Cos. A = - Cos. B Cos. C + Sin. B Sin. C Cos. a?

Cos. B = - Cos. A Cos. C + Sin. A Sin. C Cos. b } . [C].

Cos. C = - Cos. A Cos. B + Sin. A Sin. B Cos. c;

\$ 27.

Sin, a Sin, B, Sin, a Sin, C Sin, C

Bird der erfte diefer Betthe des Bin. a in bet erften, und der zweiste Berth deffelben in der zweisten der Gleichungen (o) in § 25 fubstituirt, und zugleich Cot. B fur Cos. B und

Cot. C får Cos. C gefest, fo erhatt man;

Cot. B Sin, A Sin. b = Cos. b Sin. c - Cos. A Sin. b Cos. c Cot. C Sin, A Sin. c = Cos. c Sin. b - Cos. A Sin. c Cos. b.

\$ 28-

Aus diefen Gleichungen ergeben fic durch die Bertam foung der Buchkaben folgende fechet

Sin, a Sin. B Cot. A = Cos. a Sin, c — Cos. B Sin, a Cos. c Sin, a Sin. C Cot. A = Cos. a Sin, b — Cos. C Sin, a Cos. b Sin. b Sin. A Cot. B = Cos. b Sin, c — Cos. A Sin. b Cos. c Sin. b Sin. C Cot. B = Cos. b Sin. a — Cos. C Sin. b Cos. a Sin. c Sin. A Cot. C = Cos. c Sin. b — Cos. A Sin. c Cos. b Sin. e Sin. B Cot. C = Cos. c Sin. a — Cos. B Sin. c Cos. a

, **5**,29.

Man sepe in den Gleichungen [A] § 24 und [C] § 26, A = 180° — A', B = 180° — B', C = 180° — C', a = 180° — a', b = 180° — b', c = 180° = c'; dierdurch verwandeln sie sich in solgende:

Sin. a' Sin. B' = Sin. b' Sin. A'
Sin. a' Sin. C' = Sin. c' Sin. A'
Sin. b' Sin. C' = Sin. c' Sin. B'

Cos. A' = Cos. B' Cos. C' + Cos. a' Sin. B' Sin. C'
Cos. B' = Cos. A' Cos. C' + Cos. b' Sin. A' Sin. C'
Cos. C' = Gos. A' Cos. B' + Cos. c' Sin. A' Sin. B'.
Diele Gleichungen find. in Antehung der Korm. denen

Diefe Gleidungen find, in Anfebung ber form, beneu in [A] und [B] volltommen abnlich, und weichen pur barin von

jenen ab, daß in diesen allenthatben A', B', C' ftebet, wo fich in jenen's, b, c befindet, und a', b', c' an der Stelle von A', B', C'. Es werden demnach die hier angegebenen sechs Gleichungen abnliche Resultate geben, als bie Gleichungen [A], [B], wenn man nur die Buchkaben A, B, C, a, b, c, nach eben der Ordnung in a', b', c', A', B', C' umandert.

\$ 30,

Die im porigen § gemachten Substitutionen verwandeln bemnach die Gleichungen [D] in folgende:

Sin. A'Sin. B'Cot, a' = Cos. A'Sin. C' - Cos. b'Sin. A'Cos. C' Sin. A'Sin, C'Cot, a' = Cos. A'Sin B' - Cos. c'Sin. A'Cos. B'

u, J. w.

und wenn man nun hierin far A', B', C', a', b', c', wieder ihre Werthe 180° — A, 180° — B, 180° — C, 180° — a, 180° — b, 180° — c fest, so entstehen folgende sechs Gleic chungen;

Sin. A Sin. b Cot. a = Cos, A Sin. C + Cos. b Sin. A Cos. C Sin. A Sin. c Cot. a = Cos. A Sin. B + Cos. c Sin. A Cos. B Sin. B Sin. a Cot. b = Cos, B Sin. C + Cos. a Sin. B Cos. C Sin. B Sin. c Cot. b = Cos. B Sin. A + Cos. c Cos. A Sin. B Sin. C Sin. a Cot. c = Cos. C Sin. B + Cos. c Sin. C Cos. B Sin. C Sin. b Cot. c = Cos. C Sin. A + Cos. b Sin. C Cos. A

[E]

Anmert. Die funf Klassen von Gleichungen, [A], [B], [C], [D], [E], enthalten alles, was zur Austösung eines sphärischen Oreveckes erfordert wird, wie in der Holge-gezeigt werden soll. Jum bequemeren Gebrauche der Logarithmen wird es indessen dienlich senn, noch einige Umanderungen in den Jormen der vier letten Rlassen vorzunehmen, wodurch die in denselben vortommenden Summen und Oisserenzen in Prosdute und Quotienten verwandelt werden.

2) Die erste von den Gleichungen [B] in § 24 giebt,

Cos. A = $\frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b Cos. e}}{\text{Sin b. Sin. c}}$.

hieraus erhalt man,

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \cdot \sin c}$$
 (§. 10.) *)

$$2 - \cos A = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c};$$

folglich, be
$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A}$$
 = Tang. $\frac{1}{4}$ A² (3. 46)

Tang,
$$\frac{\pi}{4}$$
 $\frac{A^{2}}{Cos.}$ $\frac{Cos.}{a - Cos.}$ $\frac{\pi}{(b + c)}$

aber Cos. φ — Cos. ψ = — 2 Sin. ‡ (φ + ψ) Sin. ‡ (φ — ψ). (F. 18), folglich

Tang.
$$\frac{1}{2} A = V \frac{\sin \frac{1}{2} (b - c + a) \sin \frac{1}{2} (b - c - a)}{\sin \frac{1}{2} (a + b + c) \sin \frac{1}{2} (a - b - c)}$$

2) Die erfte von den Gleichungen [C] giebt,

poraus man erhalt

$$1 + \cos, a = \frac{\cos, A + \cos, (B - C)}{\sin, B \sin, C}$$

$$1 - \cos a = \frac{\cos (B + C) + \cos A}{\sin B \sin C};$$

und burd ein, bem vorhergehenden abnliches Berfahren,

^{9) 3}ch beilehe mich bier auf die Formeltafel im erften Theile bies fte geometrifchen Sammlang.

Tang.
$$\frac{1}{8}a^2 = -\frac{\text{Cos. } (B+C) + \text{Cos. } A}{\text{Cos. } (B-C) + \text{Cos. } A}$$

Tang. $\frac{1}{8}a = V \frac{-\text{Cos. } \frac{1}{8}(B+C+A)\text{Cos. } \frac{1}{8}(B+C-A)}{\text{Cos. } \frac{1}{8}(B-C+A)\text{Cos. } \frac{1}{8}(B-C-A)}$

5) Aus den Gleichungen [B] erhalt man ferner,
Cos. a — Cos. b Cos. c = Sin. b Sin. c Cos. A
Cos. b — Cos. a Cos. c = Sin. a Sin. c Cos. B.

Man dibidire die erfte dieser Gleichungen durch die zwente, und sese hierauf fur Sin. b geinen Werth Sin. B, welchen man aus der erften der Gleichungen [A] erhalt; dies giebt:

Man fete guf benden Seiten i bingu; hierdurch entftebet bie Gleichung:

$$\frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b Cos. c}}{\text{Cos. b} - \text{Cos. a Cos. c}} = 1 + \frac{8\text{in. B. Cos. A}}{8\text{in. A Cos. B}}$$

oder

$$\frac{(\text{Cos. a} + \text{Cos. b})(1 - \text{Cos. c})}{\text{Cos. b} - \text{Cos. a Cos. c}} = \frac{\text{Sin. (A} + \text{B})}{\text{Sin. A Cos. B}}$$

Biehet man's ab, anftatt gu abbiren, fo erhalt man;

$$\frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b} \text{ Cos. c}}{\text{Cos. b} - \text{Cos. a} \text{ Cos. c}} - 1 = \frac{\text{Sin. B} \text{ Cos. A}}{\text{Sin. A} \text{ Cos. B}} - 1$$

ader

$$\frac{(\text{Cos. a} - \text{Cos. b})(1 + \text{Cos. o})}{\text{Cos. b} - \text{Cos. a Cos. e}} = \frac{\text{Sin. (B} - \text{A})}{\text{Sin. A Cos. B}}$$

Diese Sleichung burch die vorige dividirt, giebt, wenn man Cor. & 02 für 1 + Cos. c fest;

$$\frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b}}{\text{Cos. a} + \text{Cos. b}} \text{ Got. } \stackrel{\checkmark}{\text{s}} \text{ b}^{\text{d}} = \frac{\text{Sin. } (B - A)}{\text{Sin. } (B + A)}$$

Bermittelft ber Kormeln

$$\frac{\cos \varphi - \cos \psi}{\cos \varphi + \cos \psi} = \text{Tang. } \underline{I} (\varphi + \psi) \text{ Tang. } \underline{I} (\psi - \varphi) (\S. 4a)$$

Sin, φ = 28in. į φ Cos, į φ (F. 25) verwandelt fich biefe Gleichung in folgende:

Tang.
$$\frac{1}{4}$$
 (b - a) Tang. $\frac{1}{4}$ (b + a) Cot. $\frac{1}{4}$ co

$$\frac{\operatorname{Sin.} (B - A)}{\operatorname{Sin.} (B + A)} = \frac{\operatorname{Sin.} \frac{1}{2} (B - A) \operatorname{Cos.} \frac{1}{2} (B + A)}{\operatorname{Sin.} \frac{1}{2} (B + A) \operatorname{Cos.} \frac{1}{2} (B + A)}$$

Benn man auf benben Seiten ber Gleichung

$$\frac{\sin \cdot \mathbf{b}}{\sin \cdot \mathbf{a}} = \frac{\sin \cdot \mathbf{B}}{\sin \cdot \mathbf{A}}$$

fowohl 2 addirt als subtrabirt, und dann bende Resultate durch einander bividirt, so erhalt mans

$$\frac{\sin b - \sin a}{\sin b + \sin a} = \frac{\sin B - \sin A}{\sin B + \sin A}$$

welche fich in folgende vermandelt (2. 36):-

Tang.
$$\frac{1}{2}(b-a)$$
 Cot. $\frac{1}{2}(b+a) = \frac{\sin \frac{1}{2}(B-A)}{\sin \frac{1}{2}(B+A)} \frac{\cos \frac{1}{2}(B+A)}{\cos \frac{1}{2}(B-A)}$

Man verbinde biefe Sleichung mit der vorigen, indem man erft bas, was fich auf derfelben Seite des Gleichheitszei, chens befindet, mit einander multiplicirt; hierdurch erhalt man, wenn Tang. 4 (b + a) Cot. 4 (b + a) = 1 (8.6) gefest wird:

[Tang,
$$\frac{1}{2}(b-a)^2$$
] Cot. $\frac{1}{2}c^2 = \frac{[3in, \frac{1}{2}(B-A)]^2}{[Sin, \frac{1}{2}(B+A)]^2}$

und wenn auf beween Seiten die Quadratwurgel ausgezogen wird,

Tang.
$$\frac{1}{2}$$
 (b - a) Cot. $\frac{1}{2}$ c = $\frac{\sin \frac{1}{2}(B-A)}{\sin \frac{1}{2}(B+A)}$.

Man dividire dun auch die erfte Gleichung burch die groeptes dies giebt

Tang.
$$\frac{1}{4}(b+a)$$
 Cot. $\frac{1}{4}c = \frac{\cos \frac{1}{4}(B-A)}{\cos \frac{1}{4}(B+A)}$

Die Divifion der benden eben gefundenen Steichungen burd

Cot. Le giebt endlich, wenn Tang. Lo für Cot. Le gefest wirb:

Tang.
$$\frac{1}{2}(b-a) = \text{Tang.} \frac{1}{2}c \frac{\sin \frac{1}{2}(B-A)}{\sin \frac{1}{2}(B+A)}$$

Tang.
$$\frac{1}{2}(b+a) = \text{Tang.} \frac{1}{2} c \frac{\text{Cos.} \frac{1}{2}(B-A)}{\text{Cos.} \frac{1}{2}(B+A)}$$

4) Aus den Gleichungen [C] befommt man Cos, A + Cos, B Cos, C = Sin, B Sin, C Cos, a Cos, B + Cos, A Cos, C = Sin, A Sin, C Cos, h

Cos. A + Cos. B Cos. C Sin. B Cos. a Sin. b Cos. a Sin. a Cos. b

Durch die successive Abbition und Gubtraktion ber Ginheit fine bet man wie in g

$$\frac{(\operatorname{Cos}, A + \operatorname{Cos}, B)(1 + \operatorname{Cos}, C)}{\operatorname{Cos}, B + \operatorname{Cos}, A \operatorname{Cos}, C} = \frac{\sin \cdot (b + a)}{\sin \cdot a \operatorname{Cos}, b}$$

$$\frac{(\operatorname{Cos}, A - \operatorname{Cos}, B)(1 - \operatorname{Cos}, C)}{\operatorname{Cos}, B + \operatorname{Cos}, A \operatorname{Cos}, C} = \frac{\sin \cdot (b - a)}{\sin \cdot a \operatorname{Cos}, b}$$

Cos. B + Cos. A Cos. C Sin. a Cos. b

bbeř

$$\frac{\operatorname{Sin.}_{\frac{1}{2}}(B-A)\operatorname{Tang.}_{\frac{1}{2}}(B+A)\operatorname{Tang.}_{\frac{1}{2}}C^{a}}{\operatorname{Sin.}_{\frac{1}{2}}(b-a)} = \frac{\operatorname{Sin.}_{\frac{1}{2}}(b-a)\operatorname{Cos.}_{\frac{1}{2}}(b-a)}{\operatorname{Sin.}_{\frac{1}{2}}(b+a)\operatorname{Cos.}_{\frac{1}{2}}(b+a)}$$

$$\frac{\text{Sin. b} - \text{Sin. a}}{\text{Sin. b} + \text{Sin. a}} = \frac{\text{Sin. B} - \text{Sin. A}}{\text{Sin. B} + \text{Sin. A}}$$

leitet man auf eine abnliche Art wie bort bie folgende ber !

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(b-a)\cos \frac{1}{2}(b+a)}{\sin \frac{1}{2}(b+a)\cos \frac{1}{2}(b-a)} = \operatorname{Tang.}_{\frac{1}{2}}(B \to A)\operatorname{Cot.}_{\frac{1}{2}}(B+A).$$

Die Multiplitation und Divifion ber unmittelbat boobergebene den Gleichung burch biofe, giebt, nach ber Mustichang ber Quabrativurgel, folgende amen:

Tang.
$$\frac{1}{4}(B - \Delta) = Cot. \frac{1}{2}C\frac{Sin. \frac{1}{4}(b - a)}{Sin. \frac{1}{4}(b + a)}$$

Tang.
$$\frac{1}{2}(B + A) = Cot. \frac{1}{2}C \frac{Cos. \frac{1}{2}(b - a)}{Cos. \frac{1}{2}(b + a)}$$

5) Mus 1 und 2 laffen fic auch noch, wenn fur 1 + Cos. A, 1 - Cos. A, 1 + Cos. a, 1 - Cos. a, thre Werthe 2 Cos. 2 A2, 2 Sin. 1 A2, 2 Cos. 1 au, 2 Sin. 1, 2, 1, (g. 7 und 8) gefest werben folgende Bleidungen berleiten :

$$\sin \frac{1}{2} A = V \frac{-\sin \frac{1}{2}(b-c+a)\sin \frac{1}{2}(b-c-a)}{\sin b \sin c},$$

$$\cos \frac{1}{2} A = V \frac{-\sin \frac{1}{2}(a+b+c)\sin \frac{1}{2}(a-b-c)}{\sin b \sin c},$$

$$\frac{-\text{Cos.} \frac{1}{4}(B+C+A)\text{Cos.} \frac{1}{4}(B+C-A)}{\text{Sin. B Sin. C}}$$

$$\cos \frac{1}{2} a = V \frac{\cos \frac{1}{2} (A + B - C) \cos \frac{1}{2} (A - B + C)}{\sin B \sin C}$$

Unmert. Auch aus biefen Gleichungen laffen fic eine Menge andere burd Bertaufdung ber Budftaben berleiten. Der leichtern Heberficht wegen, und um fie in Der Folge ber

quemer anführen zu kommen, will ich nun alle bishen, gehinder nen gufammen ftellen.

§ 32.

1. Sin. a Sin. B = Sin. b Sin. A., (§ 24).

II. Sin. a Sin. C = Sin. c Sin. A.

III. : 'Sin, & Sin. C = Sin. c Sin. B.

IV. ... Gesta = Cos. b Cos. c + Cos. A Sin. b Sin. c. .. (5 24.)

Y. Bose b = Cos. & Cos. c. + Cos. B Sin. z.Sin. c.

VI. Cos. c = Cos. a Cos. b + Cos. Gaim a Sine bia.

VII. Cos. A=-Cos. B Cos. C +-Cos.a Sim B Sint Ca (§ 26.)

VIII. Cos. B= Cos. A Cos. C + Cos. b Sin. A Sin. C.

IX. Cos. C=-Cos. A Cos. B + Cos. coin, A Sig. B.

(§ 28.)

X. Sin-a Sin. B Cot. A = Cos. a Sin. c - Cos. B Sin. a Cos. c.

XI. Sin, a Sin, C Cot, A = Gos, a Sin, b - Cos, C Sin, a Cos, b.

XII. Sin, b Sin, A Cot. B = Cox, b Sin, c - Gos. A Sin, b Cos, ca

XIII. Sin. b Sin. C Cot. B = Cos. b Sin. a - Cos. C Sin. b Cos. s.

XIV. Sin. c Sin, A Cot, C = Cos. c Sin. b - Cos. A Sin. c Cos. b.

XV. Sin, e Sin, B Cot, C == Cot, c Sin, a - Cos, B Sin, c Cos, as

(§ 50.)

XVI. Sin, A Sin. b Cot. a = Cos. A Sin, C + Cos. b Sin. A Cos. C.

XVII. Sin. A Sin. c Cot. a = Cos. A Sin. B + Cos. c Sin. A Cos. B.

XVIII, Sin. B Sin. a Cot. b = Cos. B Sin. C + Cos. a Sin. B Cos. C.

XIX. Sin. B Sin. c Cot. b=Sin. A Cos. B + Cos. cSin. B Cos. A.

XX. Sin. C Sin. a Cot. c = Cos. C Sin. B + Cos. c Sin. C Cos. B.

XXI, Sin, C Sin, b Cor. c= Cos, C Sin, A + Cos, b Sin, G Gos. A.

XXII

XXII. $\sin \frac{1}{2}A = V \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \sin c}$.

XXIII. Cos. $\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)\sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c}}$

EXIV. Tang. $\frac{1}{2}$ A = $\sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c)\sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)\sin \frac{1}{2}(b+c-a)}}$

XXV. Sin. $IB \Rightarrow V \frac{\sin I(b+c-a) \sin I(a+b-c)}{\sin a \sin c}$

XXVI. Cos. $\frac{1}{4}B = V \frac{\sin \frac{1}{4}(a+b+c)\sin \frac{1}{4}(a+c-b)}{\sin a \sin c}$

XXVII. Tang. $\frac{1}{6}B = V \frac{\sin \frac{1}{6}(b+c-a) \sin \frac{1}{6}(a+b-c)}{\sin \frac{1}{6}(a+b+c) \sin \frac{1}{6}(a+c-b)}$

XXVIII. Sin, $\frac{1}{2}$ C = $\sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b)\sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin a \sin b}}$.

XXIX. Cox $\frac{1}{2}$ C = $V = V \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a \sin b}$.

XXX. Tang. $\frac{1}{2}C = V \frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}$

XXXI. Sin. $\frac{1}{2}$ a = $\sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C)\cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B \sin C}}$

EXXII. Cos, $\frac{1}{6}a = v \frac{\text{Cos}, \frac{1}{6}(A+B-C) \text{Cos}, \frac{1}{6}(A+C-B)}{\text{Sin. B Sin. C}}$

^{*)} Wein man nanflich Sin. [(a+c-b) anftatt—Sin. [(b-c-a). ind eben fo Sin. [(b+c-a) anftatt—Sin. [(a-b-e) fist. 別成係 化 Cos. [(B-C-A) 二 Cps. [(A+C-B).

XXXIII. Tang.
$$\frac{1}{2}$$
 a = $\frac{1}{Cos. \frac{1}{2}(A + B + C) Cos. \frac{1}{2}(A + C - B)}{Cos. \frac{1}{2}(A + B + C) Cos. \frac{1}{2}(A + C - B)}$

XXXIV. Sin. $\frac{1}{2}$ b = $\frac{1}{Cos. \frac{1}{2}(A + B + C) Cos. \frac{1}{2}(A + C - B)}{Sin. A Sin. C}$

XXXV. Cos. $\frac{1}{2}$ b = $\frac{1}{Cos. \frac{1}{2}(A + B + C) Cos. \frac{1}{2}(B + C - A)}{Sin. A Sin. C}$

XXXVII. Tang. $\frac{1}{2}$ b = $\frac{1}{Cos. \frac{1}{2}(A + B + C) Cos. \frac{1}{2}(A + C - B)}{Sin. A Sin. B}$

XXXVIII. Cos. $\frac{1}{2}$ c = $\frac{1}{Cos. \frac{1}{2}(A + C - B) Cos. \frac{1}{2}(A + B - C)}{Sin. A Sin. B}$

XXXVIII. Cos. $\frac{1}{2}$ c = $\frac{1}{Cos. \frac{1}{2}(A + C - B) Cos. \frac{1}{2}(A + B - C)}{Cos. \frac{1}{2}(A + B - C)}$

XII. Tang. $\frac{1}{2}$ c = $\frac{1}{Cos. \frac{1}{2}(A + C - B) Cos. \frac{1}{2}(A + B - C)}{Cos. \frac{1}{2}(A + C - B)}$

XIII. Tang. $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ Tang. $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$ Cos. $\frac{1}{2}$ (C - B)

XIII. Tang. $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ Tang. $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$ Cos. $\frac{1}{2}$ (C - B)

XIII. Tang. $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ Tang. $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$ Cos. $\frac{1}{2}$ (C - B)

XIIII. Tang. $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ Tang. $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$ Cos. $\frac{1}{2}$ (C - B)

XLIV. Tang. a - c = Tang. ib

KLV. Tang. a + c = Tang.

 $\frac{\sin \frac{1}{2}(A-C)}{\sin \frac{1}{2}(A+C)}$

Cos. 1 (A - C)

Cos. 1 (A + C)

XLVI. Tang.
$$\frac{B-A}{2} = \text{Cot.} \frac{1}{4} C \frac{8 \text{in.} \frac{1}{4} (b-a)}{8 \text{in.} \frac{1}{4} (b+a)}$$

XLVII. Tang. $\frac{B+A}{2} = \text{Cot.} \frac{1}{4} C \frac{\cos \frac{1}{4} (b-a)}{\cos \frac{1}{4} (b+a)}$

XLVIII. Tang. $\frac{C-B}{2} = \text{Cot.} \frac{1}{4} A \frac{\sin \frac{1}{4} (c-b)}{8 \text{in.} \frac{1}{4} (c+b)}$

XLIX. Tang. $\frac{C+B}{2} = \text{Cot.} \frac{1}{4} A \frac{\cos \frac{1}{4} (c-b)}{\cos \frac{1}{4} (c+b)}$

1. Tang.
$$\frac{A-C}{2} = \text{Cot.} \frac{1}{2} \frac{\text{Sin.} \frac{1}{2}(a-c)}{\text{Sin.} \frac{1}{2}(a+c)}$$

Lt. Tang.
$$\frac{A+C}{a} = \text{Cot. } \frac{1}{a} B \frac{\text{Cot. } \frac{1}{b}(a-c)}{\text{Cot. } \frac{1}{b}(a+c)}$$

Wenn man in ben Gleichungen bes vorigen I's einen ber Bintel, eine C, = 90° fept, fo erhalt man eben fo viele Gleichungen fur bas rechtwintelige spharische Drepect, wovon

Sleichungen für das rechtwinke ich nur folgende berfegen will:

1. Bin. a . Sin. c Sin. A. (Mus II.)

II. Sin. b \iff Sin. c Sin. B. (Mus III.)

III. Cos. c 🛎 Cos. a Cos. b. (fins VI.)

IV. Cos. A ± Cos. a Sin. B. (Sins VII.)

V. Cos. B = Cos. b Sin. A. (Sins VIII.)

VI'. Cos c be Con A Cot. B. (Mus IX.)

VII. Sin. b = Tang. a Cot. A. (2018 XI.)

VIII. Sim. a = Tang. b Cot. B. (\$400 XIII.)

IX. Cos. A = Tang. b Cot. c. (\$400 XIV.)

X. Cos. B = Tang. a Cot. c. (Mns. XV.)

XI. Cot A = Sin, b Cot, a. - (Mas XVI.)

XII. Cot, B = Sin, a Cot, b. (Mas XVIII.)

XIII. Sin, a = Sin, c Cos, B. (Mas XX.)

111. Anwendung ber vorhergehenden Formeln auf bie fphärische Trigonometrie.

\$ 34.

Aufg. Die drey Seiten (a, b, c) eines foharischen Dreveckes find gegebent man foll einen feiner Winkel (A) finden.

Mufl. Sierzu bienen bie Formeln

1) Cos. A = Cos. a - Cos. b Cos. c

Sin. b Sin. c

(§ 32 IV.

s) Sin. $\frac{1}{4}$ A $\Rightarrow \sqrt{\frac{\sin \frac{\pi}{4}(a+b-c)\sin \frac{\pi}{4}(a+c-b)}{\sin b}}$

Die erfte biefer benben Formeln tann in manden Fallen ihr ten Rugen haben; die givente ift gur Rechnung bequemer-

Erfes Sedsp. Für a = 51°41'14", b = 70° 20' 50", c = 38° 28' 0", findet man \(\frac{1}{2} \) A == 26° 15'0", and daher A == 52° 30' 0".

Swept. Benfp. Für a = 51° 2' 0", b = 73° 58' 54", c = 38° 45' 0", findet man A = 46° 33' 41".

Dritt. Benip. Für a = 69° 50'0", b= 109° 39' 10", c = 46° 42° 0'4', findet man A = 32° 54' 28".

35.

Aufg. Zwey Seiten (b, b) eines Drevedes und ber

von denfelben eingeschloffene Pintel (A)-find gegebent man soll die bedoen anderen mintel (B, C) finden.

Muft. hierzu dienen die Formeln,

Tang.
$$\frac{C-B}{2} = \text{Cot. } \frac{1}{4} \frac{\text{Sin.} \frac{1}{2} (c-b)}{\text{Sin.} \frac{1}{4} (c+b)}$$
. (§ 32. XL.VIII.)

Tang.
$$\frac{C+B}{2}$$
 = Cot. $\frac{1}{4}$ A $\frac{Cos. \frac{1}{4}$ ($c-b$). (\$ 32. XL_1X .)

Man erhalt namlich aus ber erften Gleichung ben Bintel $\frac{C-B}{2}$, und aus ber averten ben Biatel $\frac{C+B}{2}$, wordes ales dann ferner B und C gefunden werden.

Erf. Sendo. Sir b = 70° 20' 50", 0 = 38° 48' 0",

A = 52° 30' 0", iff \(\begin{align*} (C - b) = -15° 56' 25", \(\begin{align*} (C + b) = -34° 24' 20", \(\begin{align*} (C - B) = -34° 24' 20", \\ \ext{\$\cdot (C - B) = -38° 58' 27", \\ \ext{\$\cdot B} = 107° 47' 7" exact.

Swept. Beisp. Fdr b = '75° 58' 54", v = 58° 45'.0", A = 46° 33', 41", ift \(\) (c - b) = - 17° 36' 57", \(\) (c + b) = 56° 21' 57"; daber \(\) (C - B) = - 40° 11' 26", \(\) (C + B) = 75° 57' 41"; worans man C = 35° 46' 15", B = 115° 9' 7" erhalt.

Drift. Sen [p. Für b = 109° 39' 10'', c = 46° 42' 0'', A = 32° 54' 28", if $\frac{1}{2}$ (c - b) = -31° 28' 35", $\frac{1}{2}$ (c + b) = 78° 10' 35"; daher $\frac{1}{2}$ (C - B) = -61° 1'41'', 5, $\frac{1}{2}$ (C + B) = 85° 56' 28"; folglid C = 24° 54' 47", B = 146° 58' 9''.

Aufg. Die brey Winkel (A, B, C) eines fpharischen Drevecks find gegeben: man foll eine seiner Seiten (a) finden. Muf L Man hat,

Tang.
$$\frac{1}{8}a^2 = -\frac{\text{Cos. } (B+C) + \text{Cos. A}}{\text{Cos. } (B-C) + \text{Cos. A}}$$

Tang.
$$\frac{1}{4} = V \frac{-\cos \frac{1}{4}(B+C+A)\cos \frac{1}{4}(B+C-A)}{\cos \frac{1}{4}(B-C+A)\cos \frac{1}{4}(B-C-A)}$$

5) Aus den Gleichungen [B] erhalt man ferner,

Cos. a — Cos. b Cos. c = Sin. b Sin. c Cos. A

Cos. b — Cos. a Cos. c = Sin. a Sin. c Cos. B.

Man dividire die erfte dieser Gleichungen durch die zwente, und sese hierauf fur Sin. b feinen Werth Sin. B, welchen man aus der erften der Gleichungen [A] erhalt; dies giebt:

Man fete auf benden Seiten 1 hingu; hierdurch entflehet bie Gleichung:

$$1 + \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b} \text{ Cos. c}}{\text{Cos. b} - \text{Cos. a} \text{ Cos. c}} = 1 + \frac{\text{Sin. B. Cos. A}}{\text{Sin. A} \text{ Cos. B}}$$

oder

$$\frac{(\text{Cos. a} + \text{Cos. b})(1 - \text{Cos. c})}{\text{Cos. b} - \text{Cos. a} \text{Cos. c}} = \frac{\text{Sin. (A + B)}}{\text{Sin. A} \text{Cos. B}}$$

Biebet man's ab, anftatt ju abbiren, fo erhalt man;

$$\frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. c}}{\text{Cos. b} - \text{Cos. a} \cdot \text{Cos. c}} - 1 = \frac{\text{Sin. B} \cdot \text{Cos. A}}{\text{Sin. A} \cdot \text{Cos. B}} - 1$$

ober

$$\frac{(\text{Cos}, a - \text{Cos}, b)(1 + \text{Cos}, o)}{\text{Cos}, b - \text{Cos}, a \text{Cos}, e} = \frac{\text{Sin.} (B - A)}{\text{Sin. } A \text{ Cos. B}}$$

Piefe Gleichung durch die vorige dividirt, giebt, wenn man Cgr. & qo für 1 + Cos. c fest;

$$\frac{\text{Cos. a} - \text{Cos.b}}{\text{Cos. a} + \text{Cov.b}} \text{Got.} \frac{1}{2} \stackrel{\text{de}}{=} \frac{\text{Sin.} (B - A)}{\text{Sin.} (B + A)}$$

Bermittelft ber Formeln

$$\frac{\cos \varphi - \cos \psi}{\cos \varphi + \cos \psi} = \text{Tang.} \frac{1}{2} (\varphi + \psi) \text{ Tang.} \frac{1}{2} (\psi - \varphi) (\S, 41)$$

Sin, φ = 28in. Į φ Cos, Į φ (F. 25) verwandelt fich biefe Gleichung in folgende:

Tang.
$$\frac{1}{2}$$
 (b - a) Tang. $\frac{1}{2}$ (b + a) Cot. $\frac{1}{2}$ cs
Sin. (B - A) = $\frac{\sin \frac{1}{2} (B - A) \cos \frac{1}{2} (B - A)}{\sin \frac{1}{2} (B + A) \cos \frac{1}{2} (B + A)}$.

Wenn man auf benben Setten ber Gleichung.

$$\frac{\sin \cdot \mathbf{b}}{\sin \cdot \mathbf{a}} = \frac{\sin \cdot \mathbf{B}}{\sin \cdot \mathbf{A}}$$

fowohl 1 addirt als subtrabirt, und dann bende Resultate burch einander dividirt, so erhalt mans

$$\frac{\sin b - \sin a}{\sin b + \sin a} = \frac{\sin B - \sin A}{\sin B + \sin A}$$

welche fich in folgende vermandelt (%. 36)!-

Tang.
$$\frac{1}{2}$$
 (b - a) Cot. $\frac{1}{2}$ (b + a) = $\frac{\sin \frac{1}{2} (B - A) \cos \frac{1}{2} (B + A)}{\sin \frac{1}{2} (B + A) \cos \frac{1}{2} (B - A)}$

Man verbinde biefe Gleichung mit der vorigen, indem man erft bas, was fic auf derfelben Seite des Gleichheitszei, dens befindet, mit einander multiplicirt; hierdurch erhalt man, wenn Tang. § (b + a) Cot. § (b + a) = 1 (8.6) gefest wird:

[Tang.
$$\frac{1}{2}(b-a)^2$$
] Cot. $\frac{1}{2}c^2 = \frac{[3in,\frac{1}{2}(B-A)]^2}{[8in,\frac{1}{2}(B+A)]^2}$

und wenn auf beyden Seiten die Quadratwursel ausgezogen wird,

Tang.
$$\frac{1}{2}$$
 (b - a) Cot. $\frac{1}{2}$ c = $\frac{\sin \frac{1}{2}(B-A)}{\sin \frac{1}{2}(B+A)}$.

Man dividire fun auch die erfte Gleichung burch die groeptes dies giebt

Tang.
$$\frac{1}{6}(b+a)$$
 Cot. $\frac{1}{6}c = \frac{\cos \frac{1}{6}(B-A)}{\cos \frac{1}{6}(B+A)}$

Die Division ber benben eben gefundenen Gleichungen burch Cox. Le giebt endlich, wenn Tang. Le für _______ gefest

wird:

Tang.
$$\frac{1}{2}(b-a) = \text{Tang.} \frac{1}{2}c\frac{\sin \frac{1}{2}(B-A)}{\sin \frac{1}{2}(B+A)}$$

Tang.
$$\frac{1}{2}(b+a) = \text{Tang.} \frac{1}{2} c \frac{\text{Cos.} \frac{1}{2}(B-A)}{\text{Cos.} \frac{1}{2}(B+A)}$$

4) Aus den Sleichungen [C] betommt man
Cos, A + Cos, B Cos, C = Sin, B Sin, C Cos, a
Cos, B + Cos, A Cos, C = Sin, A Sin, C Cos, b

Cos. A + Cos. B Cos. C Sin. B Cos. a Sin. b Cos. a Sin. a Cos. b Sin. a Cos. b

Durch die successive Abbition und Subtraktion ber Einheit fine bet man wie in &

$$\frac{(\text{Cos. A} + \text{Cos. B})(1 + \text{Cos. C})}{\text{Cos. B} + \text{Cos. A Cos. C}} = \frac{\sin. (b+a)}{\sin. a \cos. b}$$

$$\frac{(\text{Cos. A} - \text{Cos. B})(1 - \text{Cos. C})}{\text{Cos. B} + \text{Cos. A Cos. C}} = \frac{\sin. (b-a)}{\sin. a \cos. b}$$

und burd Divifion ber zwenten Gleichung burch bie erfte,

$$\frac{\operatorname{Cos. A} - \operatorname{Cos. B}}{\operatorname{Cos. A} + \operatorname{Cos. B}} \operatorname{Tang. i}_{b} C^{a} = \frac{\operatorname{Sin.}(b-a)}{\operatorname{Sin.}(b+a)}$$

bber

Tang.
$$\frac{1}{2}$$
 (B-A) Tang. $\frac{1}{2}$ (B+A) Tang. $\frac{1}{2}$ Cos. $\frac{1}{2}$ (b-a) Cos. $\frac{1}{2}$ (b-a) Sin. $\frac{1}{2}$ (b+a) Cos. $\frac{1}{2}$ (b+a)

leitet man auf eine abnliche Art wie bort bie folgende ber !

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(b-a)\cos \frac{1}{2}(b+a)}{\sin \frac{1}{2}(b+a)\cos \frac{1}{2}(b-a)} = T_{ang} \frac{1}{2}(B-A)\cot \frac{1}{2}(B+A).$$

Die Multiplikation und Divifion ber unmittelbat vonbergebent ben Steichung durch diefe, giebt, nach ber Ausziehung ber Quadratmurgel, folgende zwen:

Tang.
$$\frac{1}{2}(B + A) \rightleftharpoons Cot. \frac{1}{2}C\frac{Sin. \frac{1}{2}(b - a)}{Sin. \frac{1}{2}(b + a)}$$

Tang. $\frac{1}{2}(B + A) \rightleftharpoons Cot. \frac{1}{2}C\frac{Cos. \frac{1}{2}(b - a)}{Cos. \frac{1}{2}(b + a)}$

5) Aus 1 und 2 laffen fic auch noch, wenn für i + Cos. A, 1 - Cos. a, 1 - Cos. a, thre Wetthe 2 Cos. 2 A, 2 Sin. 3 A, 2 Cos. 3 a, 2 Sin. 3 A, (K. 7 und 8) gefest wer, ben folgende Gleichungen herleiten:

Sin.
$$\frac{1}{2}A = V$$

$$\frac{-\sin \frac{1}{2}(b-c+a)\sin \frac{1}{2}(b-c-a)}{\sin b \sin c}$$
Cos. $\frac{1}{2}A = V$

$$\frac{-\sin \frac{1}{2}(a+b+c)\sin \frac{1}{2}(a-b-c)}{\sin b \sin c}$$
Sin. $\frac{1}{2}a = V$

$$\frac{-\cos \frac{1}{2}(a+b+c)\cos \frac{1}{2}(a-b-c)}{\sin b \sin c}$$
Cos. $\frac{1}{2}(a+b+c)\cos \frac{1}{2}(A-b+c)$
Sin. B Sin. C
$$\cos \frac{1}{2}(A+b-c)\cos \frac{1}{2}(A-b+c)$$
Sin. B Sin. C

An mert. Auch aus biefen Gleichungen laffen fic eine Denge andere burd Bertaufdung ber Buchkaben berleiten. Der leichtern Heberficht wegen, und um fie in der Bolge ber quemer anführen 34. tommen, will id nun alle bishen, gefunder nen gufammen fellen.

\$ 32.

1. Sin. a Sin. B = Sin. b Sin. A. (5.24)

II. Sin. a Sin. C = Sin. c Sin. A.

III. Sin, & Sin. C = Sin. e Sin. B.

IV. ... Gos.a zz. Cos. b Cos. c + Cos. A Sin. b Sin. c ... (5 24.)

V. Cos, b = Cos. a Cos. c. Cos. B Sin. a Sin. e.

VI. Cos. c = Cos. a Cos. b + Cos. Gaim a Sim bi...

VII. Cos. A = Cos. B Cds. C + Cos:a Sin. B Sint. Car(§ 26.)

VIII. Cos. B = Cos. A Cos. C + Cos. b Sin. A Sin. C.

IX. Cos. C = Cos. A Cos. B + Cos. oSin, A Sia. B.

(§ 28.)

X. Sin-a Sin. B Cot. A = Cos. a Sin. c - Cos. B Sin. a Cos. c.

XI. Sin. a Sin. C Cot. A = Gos. a Sin. b - Cos. C Sin. a Cos. b.

XII. Sin, b Sin, A Cot. B = Cos, b Sin, c - Cos. A Sin, b Cos. ca

XIII. Sin, b Sin, C Cot. B == Cos. b Sin. a -- Cos. C Sin. b Cos. a.

XIV. Sin. cSin. A Cot. C = Cos. c Sin. b - Cos. A Sin. c Cos. b.

XV. Sin, e Sin, B Cot, C == Cos, e Sin, a -- Cos, B Sin, e Cos, a.

(\$ go.)

XVI. Sin. A Sin. b Cot. a = Cos. A Sin. C + Cos. b Sin. A Cos. C.

XVII. Sin. A Sin. c Cot. = Cos. A Sin. B + Cos. c Sin. A Cos. B.

XVIII, Sin. B Sin, a Got, b = Cos. B Sin. C+ Ces. a Sin. B Cos. C.

XIX. Sin. B Sin. c Cot. b=Sin. A Cos. B + Cos. cSin. B Cos. A.

XX. Sin. CSin. a Cot. c = Cos. CSin. B + Cos. c Sin. C Cos. B.

XXI. Sin, C Sin, b Cor. c = Cos, C Sin, A + Cos. b Sin, G Gos. A.

XXII

XXII. $\sin \frac{1}{2}A = V \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \sin c}$.

XXIII. Cos. $\frac{1}{2}A = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)\sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c}$

XXIV. Tang. $\frac{1}{4}$ A= $V \frac{\sin \frac{1}{4} (a+b-c) \sin \frac{1}{4} (a+c-b)}{\sin \frac{1}{4} (a+b+c) \sin \frac{1}{4} (b+c-a)}$

XXV. Sin. $\mathbf{I} \mathbf{B} = \mathbf{V} \frac{\sin \mathbf{I} (\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}) \sin \mathbf{I} (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c})}{\sin \mathbf{a} \sin \mathbf{c}}$

XXVI. Cos. $\frac{1}{4}B = V \frac{\sin \frac{1}{4}(a+b+c)\sin \frac{1}{4}(a+c-b)}{\sin \frac{1}{4}\sin \frac{1}{4}c}$

XXVII. Tang. $\frac{1}{6}B = V \frac{\sin \frac{1}{6}(b+c-a) \sin \frac{1}{6}(a+b-c)}{\sin \frac{1}{6}(a+b+c) \sin \frac{1}{6}(a+c-b)}$

XXVIII. Sin. $\frac{1}{2}$ C = $\sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b)\sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin \frac{1}{2}\sin \frac{1}{2}}}$

XXIX. Cos $\frac{1}{2}C = V \frac{\sin \frac{\pi}{4}(a+b+c) \sin \frac{\pi}{4}(a+b-c)}{\sin a \sin b}$

XXX. Tang. $\frac{1}{2}C = V \frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b) \sin \frac{1}{2}(b+e-a)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}$.

XXXI. Sin, $\xi = V \frac{-\cos \xi(A+B+C)\cos \xi(B+C-A)}{\sin \theta \sin C}$

EXXII. Cos. $\frac{1}{6}a = V \frac{\text{Cos.} \frac{1}{6}(A+B-C) \text{Cos.} \frac{1}{6}(A+C-B)}{\text{Sin. B Sin. C}}$

XXXIII. Tang. $\frac{1}{2}$ a = $\frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C)\cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos \frac{1}{2}(A+B-C)\cos \frac{1}{2}(A+C-B)}$

XXXIV. Sin. $\frac{1}{2}b = V \frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C)\cos \frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin A \sin C}$.

XXXV. Cos. $\frac{1}{2}b = V \frac{\cos \frac{1}{2}(A + B - C) \cos \frac{1}{2}(B + C - A)}{\sin A \sin C}$

XXXVI. Tang. $\frac{1}{2}$ b = $V \frac{-\text{Cos.} \frac{1}{2}(A+B+C)\text{Cos.} \frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Cos.} \frac{1}{2}(A+B-C)\text{Cos.} \frac{1}{2}(B+C-A)}$

XXXVII. Sin. $\frac{1}{2}$ c = $\sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C)\cos \frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin A \sin B}}$.

XXXVIII. Cos. $\frac{1}{2}$ cos. $\frac{1}{2}$ (A + C - B) Cos. $\frac{1}{2}$ (B + C - A)

Sin. A Sin. B

XXXIX. Tang. $\frac{1}{4}$ $c = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{4}(A+B+C)\cos \frac{1}{4}(A+B-C)}{\cos \frac{1}{4}(A+G-B)\cos \frac{1}{4}(B+C-A)}}$

XI. Tang. $\frac{b-k}{2} \cong \text{Tang. } \frac{1}{2} \circ \frac{\sin \cdot \frac{1}{2} (B-A)}{\sin \cdot \frac{1}{2} (B+A)}$.

XLI. Tang. 1 = Tang. 1 (Cos. 1 (B - A) Cos. 1 (B + A)

XI.II. Tang. $\frac{c-b}{2} = \text{Tang.} \frac{\sin \frac{1}{2}(C-B)}{\sin \frac{1}{2}(C+B)}$

XI.IH. Tang. $\frac{c+b}{2}$ = Tang. $\frac{1}{2}$ a $\frac{\cos \frac{1}{2} (C-B)}{\cos \frac{1}{2} (C+B)}$

XI.IV. Tang. $\frac{a-c}{2} = \text{Tang. } \frac{1}{2} b \frac{\sin \frac{1}{2} (A-C)}{\sin \frac{1}{2} (A+C)}$

XI.V. Tang. $\frac{a+c}{2}$ = Tang. $\frac{1}{2}$ b $\frac{\cos \frac{1}{2}(A-C)}{\cos \frac{1}{2}(A+C)}$.

XLVI. Tang.
$$\frac{B-A}{2} = \cot \frac{1}{2}C\frac{\sin \frac{1}{2}(b-a)}{\sin \frac{1}{2}(b+a)}$$
.

XLVII. Tang.
$$\frac{B+A}{2} = \text{Cot.} \frac{1}{2} C \frac{\text{Cos.} \frac{1}{2} (b-a)}{\text{Cos.} \frac{1}{2} (b+a)}$$

XLVIII. Tang.
$$\frac{C-B}{2} = \cot \underline{I} A \frac{\sin \underline{I}(c-b)}{\sin \underline{I}(c+b)}$$

XLIX. Tang.
$$\frac{C+B}{a} = \cot \frac{1}{a} \lambda \frac{\cos \frac{1}{a}(\hat{c}-b)}{\cos \frac{1}{a}(c+b)}$$

1. Tang.
$$\frac{A-C}{2} \Longrightarrow \text{Cot.}_{\frac{1}{2}} B \frac{\text{Sin.}_{\frac{1}{2}}(a-c)}{\text{Sin.}_{\frac{1}{2}}(a+c)}$$

Lt. Tang.
$$\frac{A+C}{2} = \text{Cot. } \frac{1}{2}B \frac{\text{Cos. } \frac{1}{2}(a-c)}{\text{Cos. } \frac{1}{2}(a+c)}$$

\$ 35.

Benn man in den Gleichungen bes vorigen f's einen ber Wintel, eine C, = 90° fest, fo erhalt man eben fo viele Bleichungen fut bas rechtwinfelige sphärische Drepect, wovon ich nur folgende betfegen will:

II. Sin. b = Sin. c Sin. B. (Mus III.)

III. Cos. & E Cos. a Cos. b. (Mas VI.)

V. Cos. A = Cos. a Sin. B. (Sies VII.)

V. Cos. B == Cos. b Sin. A. (Sins VIII.)

VI. Cos c be Con A Cot B. (Sus IX.)

VII. Sin. b = Tang. a Cot. A. (Ans XI.)
VIII. Sin. a = Tang. b Cot. B. (Ans XIII.)

IX. Cos. A = Tang. b Cot. c. (Mus XIV.)

X. Cos. B = Tang. a Cot. c. (Mas. XV.)

XI. Cot. A = Sin. b Cot. a. - (Mas XVI.)

XII. Cot. B = Sin. a Cot. b. (Mas XVIII.)

XIII. Sin. a = Sin. c Cos. B. (Mas XX.)

1111. Unwendung ber vorhergehenden Formeln' auf bie fpharische Trigonomeerie.

\$ 34.

Aufg. Die drey Seiten (a, b, v) eines spharischen Dreveckes find gegeben: man foll einen seiner Winkel (A) finden.

Muft. Biergu bienen bie Formeln

s)
$$\sin \frac{1}{2} A = 1$$

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}(a+b-c) \sin \frac{\pi}{2}(a+c-b)}{\sin b \sin c}$$

Die erfte biefer benben Formeln tann in manden Fallen ibs ten Nugen haben; die zwente ift zur Rechnung bequemer.

Erkes Gedsp. Für a = 51° 41' 14", b = 70° 20' 50", c = 58° 28' 0", findet man \(\frac{1}{2} \) A = 26° 15'0", und daher \(\frac{1}{2} \) = 52° 30' 0".

Swept, Benfp. Für a = 51° 2' 0", b = 73° 58' 54", c = 38° 45' 0", findet man A = 46° 33' 47".

Dritt. Benfp. Für a = 69° 50'0", b= 109° 39' 10", e = 46° 42° 014), findet man A = 32° 54' 28".

35.

Aufg. Twey Geiten (b, b) eines Drevedes und der

von denselben eingeschsoffene Pintel (A) find gegebent man soll'die bebodu anderen Wintel (B, C) finden.

· Muft. Dierzu dienen die Formeln,

Tang.
$$\frac{C-B}{2} = \text{Cot. } \frac{1}{2} A \frac{\sin \frac{1}{2} (c-b)}{\sin \frac{1}{2} (c+b)}$$
. (§ 32. XL.VIII.)

Tang.
$$\frac{C+B}{2}$$
 = Cot. $\frac{1}{4}$ A $\frac{Cos. \frac{1}{4}(c+b)}{Cos. \frac{1}{4}(c+b)}$. (5 32. XLIX.)

Man erhalt namlich aus ber erften Gleichung ben Bintel C-B, and aus ber aventen ben Mintel C+B, worder ales bann ferner B und C gefunden werden.

Erf. Septe. Fir b = 70° 20′ 50″, c = 58° 28′ 0″, A = 52° 30′ 0″, iff ½ (c - b) = - 15° 56′ 25″, ½ (c + b) = 54° 24′ 25″; baber ½ (C - B) = - 34° 24′ 20″, ½ (C + B) = 73° 22′ 47″; morghs man C = 38° 58′ 27″, B = 107° 47′ 7″ stadil.

Swept. Beisp. Edr b = '75° 58' 54", v = 58° 48'.0", A = 46° 33', 41", sh \(\frac{1}{2}\) (c - b) = - 17° 36' 57", \(\frac{1}{2}\) (c + b) = 56° 21' 57"; baber \(\frac{1}{2}\) (C - B) = - 40° 11' 26", \(\frac{1}{2}\) (C + B) = 75° 57' 41"; worang man C = 35° 46' 15", B = 115° 9' 7" erhalt.

Drift Sen ip. Für b = 109° 39' 10", c = 46° 42' 0", A = 32° 54' 28", if $\frac{1}{2}$ (c + b) = -31° 28' 35", $\frac{1}{2}$ (c + b) = 78° 10' 35"; daper $\frac{1}{2}$ (C - B) = -61° 1'41",5, $\frac{1}{2}$ (C + B) = 85° 56' 28"; folglich C = 24° 54' 47", B = 146° 58' 9".

Aufg. Die brey Wintel (A, B, C) eines fpbarifchen Drevects find gegeben: man foll eine feiner Seiten (a) finden. Muf L Man hat,

2) Sin, $\frac{1}{4}$ a = V — Cos, $\frac{1}{4}$ (A + B + C) Cos. $\frac{1}{4}$ (B + C – A)

Sin. B Sin. C

(§ 32. XXXI.)

Anftatt der swepten fann man and die Formeln XXXII. XXXIII, brauden.

Erfes Benfp. Far A = 52° 30' 0", B,= 107° 47' 7", C = 58° 58' 27", if a = 51° 41' 14" bennahe. 18 20 ent. Benfp. Far A = 46° 53' 41", R = 115° 9' 7",

C = 35° 46' 15", if a = 51° 2' 0" beynate.

Driet. Bensp. Für A = 32° 54° 28", B = 146° 58' 9", C = 24° 54' 47", ift a = 69° 30' 0" bennette.

Aufg. 3wey Wintel (B, C) eines febarifchen Dreys och, nebft ber baran liegenden Seite (a) find gegeben ; man foll bie beyden anderen Seiten (5, c) finden.

" . Muft. Diergu Dienen Die Formein

Tang,
$$\frac{c-b}{2} = \text{Tang}, \frac{1}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2} (C-B)}{\sin \frac{1}{2} (C+B)}$$
. (§. 32. XLII.)

Tang.
$$\frac{c+b}{2}$$
 = Tang. $\frac{1}{2}a\frac{\cos \frac{1}{2}(C-B)}{\cos \frac{1}{2}(C+B)}$ (§ 32. XLIII)₂

worand fich $\frac{c-b}{2}$, $\frac{c+b}{2}$, folglich auch c und b bestimmen

Erf. Beyip. Für B = 107° 47′ 7″, C = 38° 58′ 27″, a = 51° 41′ 14″ ift c = 58° 28′ 0″, b = 70° 20′ 50″ ung geführ.

3 went. Ben [p. Für B = 115° of 7", C = 55° 46' 15", a = 51° 2' 0", if c = 38° 45' 0", b = 73° 58' 54" unte geführt.

Dritt. Ben [p. Für B = 146° 58' 9", C = 42° 54' 47", a = 69° 50' 0", ift $g = 46^{\circ}$ 42' 0", b = 109° 59' 10" ingefder.

58.

Aufg. In einem spharischen Drevede find gegeben, zwer Winkel (A, B) und die Seite (a), welche einem berefelben gegenüber liege: man foll bas liebrige finden,

Mufl. :33 Die Seite it wirb gefunden aus ber Gleichung:

2) Man tennet also in bem Orenede die Bintel A, B, und Seiten a, b; hieraus erhalt man C, vermittelft der Foremein \$ 32 XLVII, XLVI.

Tang,
$$\frac{1}{4}C = \frac{\text{Cos. } \frac{1}{4}(b-a)}{\text{Cos. } \frac{1}{4}(b+a)} \text{ Cot. } \frac{1}{4}(A+B),$$
Tang. $\frac{1}{4}C = \frac{8\text{in. } \frac{1}{4}(b-a)}{8\text{in. } \frac{1}{4}(b+a)} \text{ Cot. } \frac{1}{4}(B-A).$

3) Ferner, Die hritte Seite c, aus den Formeln § 35.

Tang.
$$\frac{1}{4}c = \frac{\cos \frac{1}{4}(B + A)}{\cos \frac{1}{4}(B - A)}$$
 Tang. $\frac{1}{4}(b + a)$,
Tang. $\frac{1}{4}c = \frac{\sin \frac{1}{4}(B + A)}{\sin \frac{1}{4}(B - A)}$ Tang. $\frac{1}{4}(b - a)$.

\$ 59.

Aufg. In einem fpharifchen Drevecke find zwer Seir ten (a, b) gegeben, und ber Wintel (A), welcher einer berfelben gegenchber liegt; man foll bas Uebrige finden.

Anfl. 1) Der Mintel B wird gefunden aus ber Sleit bung:

Sin. B =
$$\frac{\sin b \sin A}{\sin a}$$
 (5 32 I)

2) Man kennet also die Winkel A, B, und Seiten 2, b, woraus das Uebrige wie in 2 und 5 des vorigen S's bestimmt wird.

do

Die feche, in § 34—39 aufgeloften Aufgaben, enchaften al. les, was zur Berechung eines sphatischen Drepedes gehört, so lange keine andere Bestimmungsfluck zugelassen werden, als die unmittelbar gegebenen Seiten und Birtel deffelben. Ebe ich mich indeffen zu anderen Aufgaben wende, muß noch eine anscheinende Schwierigkeit aus dem Wege geraumt werden.

In den Kormein § 58, 59, werden die gesuchten Winkel und Seiten durch ihre Sinuse gegeben. Dieraus entstehet aber nothwendig eine Ungewisheit in der Bestimmung derselben, weil jedem Sinus zwey Winkel zugehören, deren einer das Complement des anderen zu 1807 ist. Es können indessen hierz den Fälle eintreten wo wirklich zwen Austöfungen start sins den; wie dies erkannt wird, zeigt unter anderen Läsiner in seinen Anfangsgründen der Arishmetik und Geometrie, sie Aust. 1800, S. 571 — 697 sehr deutlich. Ich sese hier nur die Resultate her,

1) gur die Formel § 38. I ift,

a smenbeutig, wenn

$$A < 90^{\circ}$$
, $b < 90^{\circ}$, $B < A$
 $A > 90^{\circ}$, $b > 90^{\circ}$, $B > A$
 $A < 90^{\circ}$, $b > 90^{\circ}$, $B > 180^{\circ} - A$
 $A > 90^{\circ}$, $b < 90^{\circ}$, $B < 180^{\circ} - A$

a fois, wenn

a flumpf, menn

2) Fur die Formel § 39 ift

A grorphentig, menn

B > 90°, a < 90°, b > 180° - a,

A spis, wenn

A flumpf, wenn

$$B > 90^{\circ}$$
, $a > 90^{\circ}$, $b < a$
 $B < 90^{\circ}$, $a > 90^{\circ}$, $b > 180^{\circ} - a$.

§ 41.

Aufg. Die drey Seiten eines sphärischen Drevectes find gegeben: man foll das Perpendiket finden, welches von einer feiner Spinen auf die gegenüber liegende Seite gezogen worden.

Aufl. 1), Es fen ABC (Fig. 15) das fpharifde Dreped'; bie Bezeichnung feiner Selten und Winkel wie immer; das Pers pendikel BD = p.

2) Man multiplicire die benden Gleichungen KXII, XXIII. in § 32 mit einander, und setze & Sin. A für Sin. & A. Cos, & A.; dies giebt, weim noch mit 2 multipliteirt wird,

$$\sin A = \frac{2}{8 \text{in. b Sin. c}} \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin \frac{1}{2}(b+c-a)} \right]$$

5) In dem ben D rechtwinkligen Drepede ABD ift gber nach I. § 33, wenn p für das bortige a gefest wird,

Sin. p == Sin. c Sin. A:

fubfituirt man bemnach ben in a gefundenen Ausbrud far Sin. A, fo erhalt man,

$$\sin p = \frac{a}{\sin b} V \begin{bmatrix} \sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a+b-c) \times \\ \sin \frac{1}{2}(a+c-b) \sin \frac{1}{2}(b+c-a) \end{bmatrix}.$$

£ 42

Aufg. Die brey Seiten eines fpfarifchen Drevedes find gegeben: man foll die Segmente einer Seite finden, welche hurch die Sexablaffung eines Perpenditels von der gegenüber liegenhen Sping erzeugt werden.

Aufl. 1) Es sen ABC (Jig. 15) das gegebene Oreneck, das Perpetibitel BD = p, das gesuchte Segment AD = x, das andere CD = y = h - x,

2) Alebann ift nach III. f-33.

Cos. p Cos. x == Cos. c

Cos. p Cos. y == Cos. s,

** Cos. y = Cos. (b - x) = Cos. b Cos. x + Sin. b Sin. x_q

Cos. p Cos. x = Cos. a

Cos. p (Cos. b Cos. x + Sin. b Sin. x) == Cos. e.

5) Man dividire die zwente Gleichung durch die erfte, und fete Tang = für Bin. x dies glebt

$$Gos. k + Sin, b Tang. x = \frac{Cos. a}{Cos. s};$$

worans man erháli,

Tang.
$$x = \frac{Cos. a}{Sin. b. Cos. c} - Cot. b.$$

4) Durch die Bertaufdung des a mit o und des x mit y erhalt man ferner aus diefer Gleichung,

2) Ans 2 fatt lich untr wie ung ens 4 und 2 pauf gleche

\$ 43.

Jufg. Die Grundlinie eines ipharifchen Drevectes, die Summe feiner Seizen, und ber Scheitelwinkel deffele ben find gegeben: man foll das Drevect finden.

Auf L 1) Es fen ABC (Fig. 25) bas gesuchte Drened's AC = b bie gegebene Grundlinie, AB + BC = a die geges bene Samme ber Systen, und B ber gegebene Scheitelwinkel. Es fen die unbefannte Geite BC = x; fo ift AB = s - x.

3) Bur Auftofung Diefer Aufgabe bediene ich mich ber Bleichung.

$$\cos \frac{1}{4}B^{a} = \frac{\sin \frac{1}{4}(a+b+c)\sin \frac{1}{4}(a+c-b)}{\sin a \sin c} (\$32.XXVI),$$

indem ich a = x und c = 4 - x fepe. Hierdurch entflehet die Gleichung

$$\operatorname{Cos.}_{\frac{1}{2}}B^{s} = \frac{\operatorname{Sin.}_{\frac{1}{2}}(s+b)\operatorname{Sin.}_{\frac{1}{2}}(s-b)}{\operatorname{Sin.}_{\frac{1}{2}}\operatorname{Sin.}_{\frac{1}{2}}(s-x)},$$

spet

$$\sin x \sin (s-x) = \frac{\sin \frac{1}{2}(s+b) \sin \frac{1}{2}(s-b)}{\cos \frac{1}{2}B^2}$$

5) Da num Sin. x Sin. (e-x)=1 Cos. (2x-e)-1 Cos q (8. 14), fo erhalt man, wenn i Cos a auf die andere Seise des Gleichheitszeichens gebracht und mit multiplicitt wird,

$$Cos.(2x-s) = \frac{2Sin.\frac{1}{2}(s+b)Sin.\frac{1}{2}(s-b)}{Cos.\frac{1}{2}B^2} + Cos.s,$$

moraus fic sx - . und folglich auch x bestimmen lafte.

· - - · 🕊 · · 44. · · · · · · ·

Jufg. Die Grundlinie eines fpharifchen Dreveckes, ber Unterfchied ber beyden Winkel an berfelben, und ber Unterfchied feiner Geiten ift gegeben; man foll bas Dreveck finden,

Auff. 1) In dem Drevede (fig. 15) ift gegeben:
AC = b, BAC — ACB = f, BC — AB = g. Bie Untersifiede A = C, a — c, der Wintel und Seiten find demnach gegeben; es kommt also bloß darauf an die Summien A + C, a + c, su finden.

a) Siergu bient nun bie Formet

Tang
$$\frac{a-c}{2}$$
 = Tang. $\frac{1}{2}$ $\frac{\sin \frac{1}{2}(A-C)}{\sin \frac{1}{2}(A+C)}$ (\$.32 XLIV).

Denn fest man bierin A - C = f, a - c = g, fo erbatt man;

$$\sin \frac{1}{2}(A+C) = \frac{\text{Tang. } \frac{1}{2}b\sin \frac{1}{2}f}{\sin \frac{1}{2}g},$$

woraus fic A + C bestimmen laft. 3ch fege es = h

2) Berben bie Gleichungen L, LI in \$ 52 durch eine ander binibirt, fo erhalt man,

Tang. $\frac{1}{4}(A-C)$ Sin $\frac{1}{4}(a-c)$ Cos. $\frac{1}{4}(a+c)$ Tang. $\frac{1}{4}(a-c)$ Tang. $\frac{1}{4}(a+c)$ Tang. $\frac{1}{4}(a+c)$ poer, went für A-C, a-c, A+C, thre Werthe f, g, h, gefest werden,

Tang.
$$\frac{1}{2}(a+c) = \frac{\text{Tang. }\frac{1}{2}\text{ }g\text{ }\text{Tang. }\frac{1}{2}\text{ }h}{\text{Tang. }\frac{1}{4}\text{ }f}$$
worans fix a + c bestimmen idst.

4) Seut man nun a+c=1; so erhält man $A = \frac{h+f}{2}$, $C = \frac{h-f}{2}$, $a = \frac{1+g}{2}$, $c = \frac{1-g}{2}$.

\$ 45

An fg. Der Scheitelwinkel eines fpharifchen Dreveck's und die Segmente, in welche bas von ber Spige biefes Wintels auf die Grundlinie gezogene Derpenditel biefelbe theile, find gegeben: man foll bas Dreveck finden.

Anfl. 1) In bem Brepede ABC (Fig. 15) fen B ber gegebene Scheitelwintel; bie gegebenen Segmente AD, CD, sollen m, n beißen; bas unbefannte Perpenditel beiße, ber Lurge wegen, p.

- 2) Da ABD + DBC = B befannt ift, fo hangt alles bavon ab, ben Unterschied dieser Bintel Gegmente, namito ABD DBC qu finden. Es sen daber ABD DBC = x. Alebann ift ABD = $\frac{B+x}{s}$, DBC = $\frac{B-x}{s}$.
- 3) In den rechtwinkeligen Drepeden ABD, BDC, hat man demnach aus VIII. § 33,

Sin. p = Tang. m Cot. \(\frac{1}{2}\) (B + x)
Sin. p = Tang. n Cot. \(\frac{1}{2}\) (B - x);

folglich Tang. m Cot. \(\frac{1}{2}\) (B + x) = Tang. n Cot. \(\frac{1}{2}\) (B - x),

solet

$$\frac{\text{Tang.m}}{\text{Tang. n}} = \frac{\text{Cot.} \frac{1}{2} \left(B - x\right)}{\text{Cot.} \frac{1}{2} \left(B + x\right)} = \frac{\text{Tang.} \frac{1}{2} \left(B + x\right)}{\text{Tang.} \frac{1}{2} \left(B - x\right)}.$$

4) Nach (g. 36) ift aber

$$\frac{\text{Tang.}\,\,\frac{1}{2}\,(B+x)}{\text{Tang.}\,\,\frac{1}{2}\,(B-x)} = \frac{\sin B + \sin x}{\sin B - \sin x}$$

man hat also

$$\frac{\text{Tang. m}}{\text{Tang. n}} = \frac{\sin B + \sin \bar{x}}{\sin B - \sin x}$$

woraus man erbalt,

Sin.
$$x = \frac{\text{Tang. m} - \text{Tang. n}}{\text{Tang. m} + \text{Tang. n}}$$
 Sin. R,

bder,

$$\sin x = \frac{\sin (m - \pi)}{\sin (m + \pi)} \sin B$$
, (3. 42.)

Bufas. Mus diefer Bleichung ergiebt fic ber fcone Lebrfas:

Daß in jedent sphanichen Dreveite, wenn von einem Wintel bestelben auf die gegenaber liegende Seize ein Perpendikel beradgelassen wird, der Sinus dieser Seize te fich zum Sinus der Differenz ihrer Segmente eben so verhalte, wie der Sinus des Winkels zum Sinus der Differenz seiner Segmente.

\$ 46.

Aufg. Aus irgend einet Spige eines spharischent Drevectes, besten brey Seiten gegeben find, wird ein Bo, gen eines größten Areifes nach beit gegenüber liegenden Seite gezogen; die Segmente berfelben find gegeben: man foll ben Bogen finden.

Buff. 4) Es fenen, wie immer, a, b, b, ble bren geger benen Seiten bes Oreneckes ABC (gig. 15); AD em m, bas aeathene Segment; BD := x ber gefuchte Bogen.

2) Rach f 32 IV erhalt man and bem Drepede ABC,

$$Cos. A = \frac{Cos. a - Cos. b Cos. c}{Sin, b Sin. c},$$

und aus bem Drepede ABD;

3) Seps man diefe benden Berthe des Cos. A kinandet gleich, fo entflehet die Gleichung

und hieraus ergiebt fich,

Cos. x = (Cos. à - Cos. b Cos. c) Sin. m + Cos. c Cos. m, worens fich & bestimmen lift.

\$ 47.

Aufg. Die brev Seiten eines fpharifdien Drevectes find gegeben; auf einer diefer Seiten wird irgend ein Duntt angenommen, und aus demfelben nach einem ge, gebenen Duntte auf einer anderen Seite des Drevectes ein Bogen gezogen man foll diefen Bogen finden.

Mufl. 1) Es fepen a, b; o; die bren Geiten bes Dreive edes ABC (Fig. 16); b', c', die gegebenen Segmente AH, AG; ber gesuchte Bogen GH == 1.

2) Man hat alsbann in Drenede ABC,

Cos. A = Cos. a - os. b Cos. c

Sin. b Sin. c

und im Drebede AGH,

3) Hierans ergiebt fic die Gleichung,

bemnach ift,

Cos. x=(Cos. a - Cos. b Cos. c) Sin. b'Sin. e' + Cos. b'Cos. c';
worans fic x bestimmen last.

1) Coa.a = Cos. A + Cos. B Cos. C (\$152. VII.)

s) Sin, $\frac{1}{4} = V - \cos \frac{1}{4} (A + B + C) \cos \frac{1}{4} (B + C - A)$

Sin. B Sin. C

(\$ 32. XXXI.)

Anftatt der swepten tann man auch die Formeln XXXII. XXXIII, branden,

Erfes Benfp. Far A = 52° 30' 0", B = 107° 47' 7",

= 58° 58' 27", ift a = 51° 41' 14" bennabe.

3 = 35° 46' 15", if 'a = 51° 2' 0" beynahe.

Dritt. Bensp. gür A = 32° 54° 28", B = 146° 58' 9", C = 24° 54' 47", if a = 69° 30' 0" bennete.

Aufg. 3wey Wintel (B, C) eines febarischen Drew oche, nebft ber baren liegenden Seite (a) find gegeben ; man foll die beyden anderen Seiten (b, c) finden.

"Aufl. Diergu Dienen Die Formeln ...

Tang,
$$\frac{c-b}{2} = \text{Tang}, \frac{1}{4} = \frac{\sin \frac{1}{4} (C-B)}{\sin \frac{1}{4} (C+B)}$$
. (5. 32. XIII.)

Tang.
$$\frac{c+b}{2} = \text{Tang. } \frac{1}{2} = \frac{\text{Cos.} \frac{1}{2} (C-B)}{\text{Cos.} \frac{1}{2} (C+B)}$$
. (§ 32. XLIII)₄

worand fic $\frac{c-b}{2}$, $\frac{c+b}{2}$, foiglich auch c und b beftimmen

Erf. Beyip. Für B = 107° 47' 7", C = 38° 58' 27", a = 51° 41' 14" if c = 58° 28' 0", b = 70° 20' 50" unu geführ.

2 ment. Benip. Für B = 115° 9' 7", C = 35° 46' 15", = = 51° 2' 9", if c = 38° 45' 0", b = 73° 58' 54" unte geführ.

Aufg. In einem fphariichen Drevede find gegebe zwey Winkel (A, B) und bie Seite (a), welche einem bt felben gegenüber liegt: man foll bas liebrige finden,

Muft, 137. Die Geite ih wirb gefunden aus ber Gleichun

2) Man tennet alfo in bem Orepede Die Bintel A, 1 und Geiten a, b; hieraus erhalt man C, permittelft der go mein \$ 32 XLVII, XLVI.

Tang.
$$\frac{1}{2}$$
C $\rightleftharpoons \frac{\text{Cos. }\frac{1}{2}(b-a)}{\text{Cos. }\frac{1}{2}(b+a)}$ Cot. $\frac{1}{2}(A+B)$,

Tang. $\frac{1}{2}$ C $\rightleftharpoons \frac{\text{Sin. }\frac{1}{2}(b-a)}{\text{Sin. }\frac{1}{2}(b+a)}$ Cot. $\frac{1}{2}(B-A)$.

3) Fornier, Die pritte Geite c, aus ben Formeln & 3 XLI, XL

Tang.
$$\frac{1}{4}c = \frac{\text{Cos. } \frac{1}{4}(B + A)}{\text{Cos. } \frac{1}{4}(B + A)}$$
 Tang. $\frac{1}{4}(b + a)$,
Sin. $\frac{1}{4}(B + A) = \frac{1}{4}(a + a)$

Tang.
$$\frac{1}{4}c = \frac{\sin \frac{1}{4}(B + A)}{\sin \frac{1}{4}(B - A)}$$
 Tang. $\frac{1}{4}(b - a)$.

§ 59₁

Mufg. In einem fobarifchen Drevede find zwer Si ten (a, b) gegeben, und ber wintel (A), welcher ein berfelben gegeniber liegt; man foll bas Uebrige finden.

Aufl. 1) Der Wintel B wird gefunden aus ber Gli Oung:

2) Man kennet also die Winkel A, B, und Seiten 2, b, woraus das Uebrige wie in 2 und 3 des vorigen I's bestimmt wird.

\$ 40

Die fechs, in § 34 — 39 aufgelöften Aufgaben, enthalten at. les, was zur Berechung einen sphatischen Orepedes gehört, so lange keine andere Bestimmungsftuck augelassen werden, als die unmittelbar gegebenen Gesten und Winkel deffelben. Sie ich mich indessen zu anderen Aufgaben wende, muß noch eine anscheinende Schwierigkeit aus dem Wege geräumt werden.

In den Kormeln § 38, 39, werden die gesuchten Wintet und Seiten durch ihre Sinnsfe gegeben. Dieraus entstehet aber nothwendig eine Ungewisheit in der Bestimmung derselben, weil jedem Sinus zwer Wintel zugehären, deren einer das Complement des anderen zu 1809 ift. Es tomen indessen hiers den Falle eintreiden wo wirklich zwen Austösungen figer fins den; wie dies erkannt wird, zeigt unter anderen Läfiner in seinen Ansangsgründen der Arishmetit und Geometrie, Gee Aust. 1800, S. 571 — 577 sehr deutlich. Ich sese bier nur die Resultate her.

1) Fur die Formel § 38. I ift,

a amendeutig, wenn

A
$$< 90^{\circ}$$
, b $< 90^{\circ}$, B $<$ A
A $> 90^{\circ}$, b $> 90^{\circ}$, B $>$ A
A $< 90^{\circ}$, b $> 90^{\circ}$, B $> 180^{\circ}$ — A
A $> 90^{\circ}$, b $< 90^{\circ}$, B $< 180^{\circ}$ — A

s fois, wenn

a ftumpf, menn

$$A > 90^{\circ}$$
, $b > 90^{\circ}$, $B < A$
 $A > 90^{\circ}$, $b < 90^{\circ}$, $B > 180^{\circ} - A$

2) Für die Formel § 39 ist

A amendeutig, wenn

A fpis, wenn

A ftumpf, wenn

§ 41.

Aufg. Die Drey Seiten eines fpharischen Dreyectes find gegeben; man foll bas Perpendikel finden, welches von einer seiner Spinen auf die gegenüber liegende Seit te gezogen worben.

Auss. 1), Es sen ABC (Fig. 15) das spharische Drepeck; bie Bezeichnung seiner Seiten und Winkel wie immer; das Perspendikel BD = p.

2) Man multiplicire die benden Gleichungen KXII, XXIII. in § 52 mit einander, und sepe & Sin. A fan Sin. & Cos, & A; dies giebt, weim noch mit 2 multipliscirt wird,

$$\sin A = \frac{2}{\sin b \sin c} \begin{cases} \sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a+b+c) \times \\ \sin \frac{1}{2}(a+c-b) \sin \frac{1}{2}(b+c-a) \end{cases}$$

3) In dem ben D rechtwinkligen Orenede ABD ift gber nach I. § 33, wenn p für das dortige a gefest wird, Sin, p = Sin c Sin. A:

fubflituirt man bemnach ben in a gefundenen Ausbrud far Sin. A., fo erhalt man,

$$\sin p = \frac{a}{\sin b} V \begin{bmatrix} \sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a+b-c) \times \\ \sin \frac{1}{2}(a+c-b) \sin \frac{1}{2}(b+c-a) \end{bmatrix}.$$

44

Aufg. Die drey Geiten eines spharischen Drevedes find gegeben: man-foll die Segmente einer Beite finden, weiche hurch die Sexablaffung eines Perpendikels von der gegenüber liegenhen Sping erzeugt werden.

Aufl. 1) Es sen ABC (Fig. 15) bas gegebene Oreneck, bas Perpefibitel BD = p, bas gesuchte Segment AD = x, bas anbere CD = y = h - x,

2) Alsbann ift nach III. f-33,

" Cos. p Cos. x = Cos. c

Cos. p Cos. y = Cos. a,

there has Gos. y = Gos. (b - x) = Gos. b Cos. x + Sin. b Sin. x_qGos. p Cos. x = Gos. a

Cos. p (Cos. b Cos. x + Sin. b Sin, x) = Cos. c.

3) Man dividire die zwente Gleichung durch die erfte, und fege Tang = für Gos. x dies giebt

wergus man erhált,

Tang.
$$x = \frac{Cos. a}{Sin. b. Cos. c}$$
 — Cot. b.

4) Durch bie Bertaufdung des a mit o und bes umit y erhalt man ferner aus biefer Glebchung,

Tang.
$$y = \frac{Cos.c}{Sin.b.Cos.a} - Cot.b.$$

tinne fingeis' 2. jest fich bieter wie und ene 4 and A prud gieche

\$ 43

Aufg. Die Grundlinie eines ipharischen Drevectes, die Summe feiner Seiten, und der Scheitelwinkel deffele ben find gegeben: man foll das Drevect finden.

Aufl 1) Es fen ABC (Rig. 15) bas gesuchte Drepecta AC = b bie gegebene Grundlinie, AB + BC = a bie gegee bene Samme ber Stiten, und B ber gegebene Scheitelmintel. Es fen die unbefannte Geite BC = x; so ift AB = 0 - x

2) Bur Auftofung Diefer Aufgabe bediene ich mich ber Bleichung.

$$\cos \frac{1}{4}B^{4} = \frac{\sin \frac{1}{4}(a+b+c)\sin \frac{1}{4}(a+c-b)}{\sin \frac{1}{4}\sin \frac{1}{4}}$$
 ('\$32.XXVI),

indem ich a = x und q = 4 - x fest. hierburch entstebet bie Gleichung

$$\operatorname{Cos}_{\frac{1}{2}}B^{s} = \frac{\operatorname{Sin}_{\frac{1}{2}}(s+b)\operatorname{Sin}_{\frac{1}{2}}(s-b)}{\operatorname{Sin}_{x}\operatorname{Sin}_{y}(s-x)},$$

epet

$$\sin x \sin (s-x) = \frac{\sin \frac{1}{2}(s+b) \sin \frac{1}{2}(s-b)}{\cos \frac{1}{2}B^2}$$

5) Da nun Sin. x Sin. (s-x)= Cos. (2x-s)- Coa q (f. 14), fo erhalt man, wenn & Cos a auf die andere Seite des Bleichheitegeidens gebracht und mit multiplicirt wird,

Cos.
$$(2x-s) = \frac{2\sin \frac{1}{2}(s+b)\sin \frac{1}{2}(s-b)}{\cos \frac{1}{2}B^2} + \cos s$$
, woraus fich $2x-s$, und folglich auch x bestimmen icht.

Jufg. Die Grundlinie eines fpharischen Drevedes, ber Unterschied der berden Winkel an derselben, und der Unterschied seiner Geiten ift gegeben; man foll bas Drevedfinden,

Aufl. 1) In dem Dreverte (Rig. 15) ift gegeben:
AC = b, BAC — ACB = f, BC — AB = g. Die Untersichiede A — C, a — c, der Wintel und Seiten find demnach gegeben; es tommt also bloß darauf an die Summen A + C, a + c, su finden.

4) Siergu bient nun bie Formet

Tang.
$$\frac{a-c}{2}$$
 = Tang. $\frac{1}{2}$ $\frac{\sin \frac{1}{2}(A-C)}{\sin \frac{1}{2}(A+C)}$ (\$ 32 XLIV),

Denn fest man bierin A - C = f, a - c = g, fo erhale man:

$$\sin \frac{1}{2}(A+C) = \frac{\text{Tang. } \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}E}{\sin \frac{1}{2}E}$$

worque fic A + C bestimmen laft. '3ch fepe es = h

a) Berben die Gleichungen L, LI in \$ 52 durch eine ander dividirt, fo erhalt man,

 $\frac{\operatorname{Tang.}_{\frac{1}{2}}(A-C)}{\operatorname{Tang.}_{\frac{1}{2}}(A+C)} = \frac{\operatorname{Sin}_{\frac{1}{2}}(a-c)\operatorname{Cos.}_{\frac{1}{2}}(a+c)}{\operatorname{Cos.}_{\frac{1}{2}}(a-c)\operatorname{Sin.}_{\frac{1}{2}}(a+c)} = \frac{\operatorname{Tang.}_{\frac{1}{2}}(a-c)}{\operatorname{Tang.}_{\frac{1}{2}}(a+c)}$ where, we me for A-C, a-c, A+C, thre Werthe f, g, h, geight we reden,

$$Tang. \underline{i}(a+c) = \frac{Tang. \underline{i}g Tang. \underline{i}h}{Tang. \underline{i}f}$$

worans fic a + c bestimmen tagt.

4) Sept man nun a+c=1; so erhält man
$$A = \frac{h+f}{2}$$
, $C = \frac{h-f}{2}$, $a = \frac{1+g}{2}$, $c = \frac{1-g}{2}$.

\$ 45

Anfg. Der Scheitelwinkel eines spharischen Dreveck's und die Segmente, in welche das von der Spige dieses Winkels auf die Grundlinie gezogene Derpendikel dieselbe theile, find gegeben: man foll das Dreveck finden.

Aufl. i) In dem Brenede ABC (Fig. 15) fen B ber gegebene Scheitelwintel; bie gegebenen Segmente AD, CD, follen m, n beißen; bat ainbefannte Perpenditel heiße, ber Rurge wegen, p.

- 2) Da ABD + DBC = B bekannt ift, so hangt alles bavon ab, ben Unterschied dieser Bintel Gegmente, namtich ABD DBC zu finden. Es sen daber ABD DBC = $\frac{B+x}{a}$, DBC = $\frac{B-x}{a}$.
- 5) In den rechtwinkeligen Breveden ABD, BDC, bat man dennach ans VIII. f. 35.

Sin. $p = \text{Tang in Cot. } \{(B + x)\}$

Sin, p = Tang, $n \cot \frac{1}{2} (B - x)$;

folglich Tang. m Cot. & (B + x) = Tang. n Cot. & (B - x), ober

$$\frac{\text{Tang.mr}}{\text{Tang. n}} = \frac{\text{Cot.} \frac{1}{2} \left(B - x\right)}{\text{Cot.} \frac{1}{2} \left(B + x\right)} = \frac{\text{Tang.} \frac{1}{2} \left(B + x\right)}{\text{Tang.} \frac{1}{2} \left(B - x\right)}.$$

4) Nach (F. 36) if aber

$$\frac{\operatorname{Tang.} \frac{1}{2} (B + x)}{\operatorname{Tang.} \frac{1}{2} (B - x)} = \frac{\operatorname{Sin.} B + \operatorname{Sin.} x}{\operatorname{Sin.} B - \operatorname{Sin.} x}$$

man bat alfo

woraus man erhalt,

$$Sin. \times := \frac{Tang. m - Tang. n}{Tang. m + Tang. n} Sin. R,$$

bber,

$$\sin x = \frac{\sin (m - n)}{\sin (m + n)} \sin B$$
. (3. 42.)

Bufag. Mus biefer Bleichung ergiebt fic ber icone

Das in jedent sphauschen Dreveite, wenn von einem Windel besselben auf die gegendber liegende Seine ein Perpenditel berabgelassen wird, der Sinus dieser Seis te sich zum Sinus der Differenz ihrer Segmente ebent so verhalte, wie der Sinus des Wintels zum Sinus der Differenz seiner Segmente.

\$ 46.

Aufg. Aus irgend einer Spige eines spharischent Drevectes, besten drey Seiten gegeben find, wird ein Borgen eines größten Breifes nach beit gegenüber liegendent Seite gezogen; die Segmente berfelben find gegeben; man foll den Bogen finden.

Aufl. 4) Es seven, wie immer, a, b, b, die bren geger benen Seiten bes Orenettes ABC (gig. 15); AD em m, bas aeathene Segmant; BD = x ber gesuchte Vogen.

2) Rach f 32 IV erhalt man and bem Drepede ABC,

und aus bem Drepede ABD;

3) Sest man diefe benben Werthe det Coe. A kinanbet gleich , fo entflebet die Gleichung

$$\frac{\text{Cos. x - Cos. c Cos. m}}{\text{Sin. c Sin. m}} = \frac{\text{Cos. a - Cos. b Cos. c}}{\text{Sin. b Sin. c}}$$

und hieraus ergiebt fich,

Cos. x = (Cos.a - Cos. b Cos. c) Sin. m + Cos. c' Cos. m,
woraus fic x bestimmen lift.

\$ 47.

Aufg. Die brev Seiten eines fpharifchen Drevectes find gegeben; auf einer diefer Seiten wird irgend ein Dunte angenommen, und aus demfelben nach einem ge, gebenen Dunte auf einer anderen Seite des Drevectes ein Bogen gezogen: man foll diefen Bogen finden:

Mufl. 1) Es fepen a, b; o; die bren Seiten bei Drebe edes ABC (fig. 16); b', c', die gegebenen Segmente AH, AG; der gesuchte Bogen GH == 12.

2) Man hat alsbann in Drehede ABC,

Cos. A = Cos. a — cos. b Cos. c

Sin. b Sin. c

und im Drenede AGH,

Cos.
$$A = \frac{\text{Cos. } \pm - \text{Cos. } \text{b' Cos. } \text{c'}}{\text{Sin. } \text{b' Sin. } \text{c'}}$$

Sin, b' Sin, c'

Sin, b Sin, c'

Sin, b Sin, c'

bemnach ift,

Cos. x=(Cos. a - Cos. b Cos. c) Sin. b Sin. e + Cos. b Cos. c'; worans fich x bestimmen lift.

Werben in einem spharischen Drepede ABC (Fig. 17) die Sehnen AB, AC, BC, der eben so benannten Bogen gezogen, so schieben diese graden Linien ein Dreped ein, welches ich, der Kurze wegen, das Sehnendreveck des spharischen nennen will; die Seiten und Winkel des erfteren, so wie sie den Seiten und Binkel des erfteren, so wie sie den Seiten und Binkeln a, b, c, A, B, C, des letzteren korrespondiren, sollen durch die Buchkaben a', b', c', a, \beta, \gamma, ber geichnet werden. In welcher Beziehung das spharische Dreps ach mit seinem Sehnendreped ftebet, werden die solgenden Ausgaben zeigen.

. Š 49.

Aufg. Aus ben gegebenen Seiten eines fibarifchen Dreved's bie Seiten bes Sehnenbreved's gu finden, und umgekehrt, jene gu finden, wenn biese gegeben find.

Aufl. i) Die Sehne eines Bogens ift bekanntlich, den Halb, imeffer beffelben für die Einheit angenommen, immer doppelt so groß als der Sinus seiner Halfte. Man hat demnach,

a' = 2 Sin. ja, b' = 2 Sin. jb, c' = 2 Sin. jc. Bermittelft diefer Gleichungen laffen fic die Seiten des Sesti nendrepedes aus den Seiten des spharischen bestimmen.

2) Umgekehrt hat man

Sin. $\xi a = \frac{1}{2}a'$, Sin. $\xi b = \frac{1}{2}b'$, Sin. $\xi c = \frac{1}{2}c'$; ober, da Cos. $\varphi = 1 - 2$ Sin. $\xi \varphi^2$,

Cos. a = I - Fa'2, Cos. b = 1' - Fb'2, Cos. c = 1 - Fo'2.

Bermittelft diefer Bleichungen laffent fich bie Seiten bes fobal, rifchen Drepetts aus ben Seiten des Sehnendrepects finden.

50.

Aufg. Aus ben gegebenen Seiten Des fpharifchen Drevecks Die Wintel Des Sehnendrevecks, und umgekehrt,

aus den gegebenen Seiten des Sehnendrevedts die Win: tel des fpharifchen gu bestimmen.

Anfl. 1) Aus der ebenen Erigonometrie ist bekannt, daß $Cos. \alpha = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2 \cdot b'c'}.$

Werben hierin far a', b', c', ihre Werthe aus 1 § 49 fubfit wirt, so erhalt man

$$\cos \alpha = \frac{\sin \cdot \frac{1}{2} b^2 + \sin \cdot \frac{1}{2} c^2 - \sin \cdot \frac{1}{2} a^2}{2 \sin \cdot \frac{1}{2} b \sin \cdot \frac{1}{2} c} \dots [\varphi].$$

Eben fo wird gefunden,

Cos.
$$\beta = \frac{8in. \frac{1}{6} a^2 + 8in. \frac{1}{6} c^3 - 8in. \frac{1}{6} b^4}{2 Sin. \frac{1}{6} a Sin. \frac{1}{6} c}$$
Sin. $\frac{1}{6} a^2 + Sin. \frac{1}{6} b^2 - Sin. \frac{1}{6} c$

Cos. y == Sin. \(\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} \sin. \(\frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} \sin. \(\frac{1}{2} c^2 \)

2) Aus S 32 IV. hat man

Cos. A =
$$\frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b}}{\text{Sin. b}}$$
 Sin. c

Nun if (§ 49.2) Cos. $a = 1 - \frac{1}{2}a^{rs}$, $\cos_{\gamma}b = 1 - \frac{1}{2}b^{rs}$, $\cos_{\gamma}b = 1 - \frac{1}{2}b^{rs}$, $\cos_{\gamma}b = 1 - \frac{1}{2}b^{rs}$) so $b^{r}V(1 - \frac{1}{4}b^{rs})$, $\sin_{\gamma}c = V[1 - (1 - \frac{1}{4}c^{rs})^{2}] = c^{r}V(1 - \frac{1}{4}c^{rs})$; werden diese Werthe substitutiert, und hierauf Bahler und Renner mit 4 multiplicitet, so erhalt man,

$$\mathbf{Cos} \cdot \mathbf{A} = \frac{2b'^2 + 2c'^2 - 2a'^2 - b'^2c'^2}{b'c' \ \nu \ (4 - b'^2) \ (4 - c'^2)} \cdot \cdot \cdot [\psi]_{\nu}$$

Cos. B =
$$\frac{2a^{12} + ac^{12} - ab^{12} - a^{12}c^{14}}{a^{1}c^{1}V(4 - a^{12})(4 - c^{12})}$$
,

Cos. C =
$$\frac{2a^{12} + 2b^{12} - 2c^{12} - a^{12}b^{12}}{a^{1}b^{1} V(4 - a^{12})(4 - b^{12})}$$
.

Beometrie II.

Erft. Bufas. 3ft bas fpbartide Drenad gleichfcentelig, und p. B. c = b, fo erhalt man aus 1,

Cos.
$$\alpha = \frac{2 \sin \frac{1}{2} b^2 - \sin \frac{1}{2} a^2}{2 \sin \frac{1}{2} b^2} = \frac{\sin \frac{1}{2} a^2}{2 \sin \frac{1}{2} b^2}$$

folglich

i — Cos.
$$\alpha = 2 \operatorname{Sin}, \frac{1}{4} \alpha^2 = \frac{\operatorname{Sin}, \frac{1}{4} a^2}{2 \operatorname{Sin}, \frac{1}{8} b^2}$$

und hieraud,

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{2 \sin \frac{1}{2} b}$$

If das spharische Dreped gleichseitig, so ift auch a = B, folglich Sin. $\xi \alpha = \xi$, und baber $\xi \alpha = 30^{\circ}$, $\alpha = 60^{\circ}$; wie auch sepn mus, weil in diesem Falle das Gehnendreped ebenfalls gleichseitig wird.

8ment. Buf. Bird in 2, c' = b' gefest; fo giebt bies

Cos. A =
$$\frac{4b^{/2} - 2a^{/2} - b^{/4}}{b^{/2} (4 - b^{/2})} = 1 = \frac{2a^{/2}}{b^{/2} (4 - b^{/2})^2}$$

folglið

$$1 - \operatorname{Cos}_{A} = 2 \sin_{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = \frac{2 a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} (4 - b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}$$

und daher,

$$\sin \frac{a'}{b' \mathcal{V} (4-b'^2)}$$

Bur bas gleichfeitige Dreped ift b' = a', folglich,

$$\sin \frac{1}{4} = \frac{1}{V(4-a^{2})}.$$

$$\frac{2}{5} \cdot 5^{2}.$$

Aufg. In einem febarischen Drevede kennet, man einen Winkel und die Seiten, welche denselben einschlies gen: man foll den korrespondirenden Winkel des Sehnens drevede finden.

Ruft Rad S 52 IV. if

Cos, a in Cos, b Cos, c + Cos, A Sin. b Sin. c, folglich

i — Cos. a = i — Cos. b Cos. c — Cos. A Sin. b Sin. c.

Nun ift aber 1 — Cos. a = 2 Sin. ½ a , Cos. b = 1 — 2 Sin. ½ b ,

Cos. c = i — 2 Sin. ½ e , Sin. b = 3 Sin. ½ b Cos. ½ b ,

Sin. c = 2 Sin. ½ c Cos. ½ c; man bat baber burch die Subs

fituation diefer Werthe und durch die gebörige Reduktion,

Sin. ½ a = 1 — 2 Cos. 4 Sin. ½ c = 4 Sin. ½ b Sin. ½ c = 1

2 Cos. 4 Sin. ½ b Cos. ½ b Sin. ½ c Cos. ½ c

und wein biefer Werth non Sin. & an in ber Gleichung [m]

bes vorigen §'s substituiet wird, Cos. α = Sin. ξ b' Sin. ξ c + Cos. A Cos ξ b Cos. ξ c.

Eben fo hat man

Cos. $\beta = \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} c + \cos B \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} c$, Cos. $\gamma = \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b + \cos C \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b$.

Buf. In dem gleichschenkligen Drepede, ober wenn

Cos. $\alpha = 8in$, $\frac{1}{2}b^2 + Cos. A Cos. <math>\frac{1}{2}b^2 = Cos. A + (1 + Cos. A) Sin$, $\frac{1}{2}b^2$,

Sher à Sin. $\frac{1}{2}A^2$ für 1 + Cos. A gefest,

Cos. $\alpha = Cos. A + 2 Sin. & b^2 Sin. & A^2$.

'§ 50.

Aufg. Zwey Geiten und der von ihnen eingeschlosse ne Winkel eines Gehnendrevecks find gegeben; man soll ben korrespondirenden spharischen Winkel finden.

Muft. Aus ber ebenen Bigonometrie ift befannt, bas in bem gerablinigen Drepede ABC, (Fig. 27),

a/2 = b/2 + c/2 - 2b/c/Cosia.

Substituirt man diefen Werth bes a's in bie Gleichung (4) § 50, fo ethalt nim nach gehöriger Reduttion

Cos,
$$A = \frac{4 \cos_{10} \alpha - b/c'}{V(4 - b'^{2})(4 - c'^{2})}$$

Chen fo finbet man ferner,

Cos. B =
$$\frac{4\cos \beta - a'c'}{V(4 - a'^2)(4 - c'^2)}.$$
Cos. C =
$$\frac{4\cos \gamma - a'b'}{V(4 - a'^2)(4 + b'^2)}.$$

Buf. Wenn b'= c', d. h. wenn das Sehnendreped, folglich auch das fobarifde gleichschenketig ift, hat man,

$$\cos A = \frac{4 \cos \alpha - b^{/2}}{4 - b^{/2}},$$

und daher

$$1 - \cos A = \frac{4(1 - \cos a)}{4 - b'^2}$$

ober

Sin.
$$\frac{1}{4}$$
 A² $=$ $\frac{4 \operatorname{Sin}, \frac{1}{4} \alpha^{2}}{4 - b^{2}}$,

Sin. $\frac{1}{4}$ A $=$ $\frac{2 \operatorname{Sin}, \frac{1}{4} \alpha}{1/(2 + b^{2})}$

welcher Mutbruck fich mit hulfe ber Logarithmen febr leiche berechnen lefft.

Anmert. Da Sin. $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b'(\int 49)$, so ift Cos. $\frac{1}{2}b = V(1 - \frac{1}{2}b'^2)$, oder 2 Cos. $\frac{1}{2}b = V(4 - b'^2)$. Demnach ift im gleichschenkligen Orenede,

$$\sin \frac{1}{2}A = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha}{V(4-b^{2})} = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{Cbs. \frac{1}{2}b'}$$

unb

Sin. $\frac{1}{2}\alpha = \text{Cos. } \frac{1}{2}\text{ b Sin. } \frac{1}{4}\text{ A};$

eine Gleichung, welche bie Beziehung zwifden bem Scheitelwin-

tel des spharischen gleichschenkligen Drepeds, bem ihm torresponstirenden Wintel des Sehnendreperts, und dem Schenkel des erfteren angiebt. Man fiehet auch jugleich hieraus, daß der Scheitelwintel eines spharischen gleichschenkligen Dreperts immer größer ift, als der Scheitelwintel des Sehnendreperts.

\$ 55.

Aufg. In einem spharischen Vierede sind drey Seiten und die bezoen von ihnen eingeschlossenen Winkel get geben: man soll das Viered bestimmen.

Auft. In dem Bierede ABCD (Fig. 18) find gegeben, die dren Seiten AB = m, AC = n, BD = p, und die Bintel BAC = A, ABD = B.

- 1) In dem Drepede ABD fennet man aledann die zwen Seiten m, p, und den von ihnen eingeschloffenen Winkel B, folglich auch die dritte Seite AD, und die Winkel BAD, ADB.
- 2) Sierans ergiebt fich ferner der Bintel CAD = A BAD.
- 3) Man hat also nunmehr in dem Prepede CDA zwen Seiten AC = n, und AD; folglich auch CD, und die Binv tel ACD, ADC. Auch hat man den Wintel BDC = ADB + ADC. Es find also alle Seiten und Wintel des Bierecks bekannt.

§ 54.

Unfg. Zwischen den vier Seiten eines spharischen Dierecks und zwey gegenüber liegenden Winkeln desselben eine Bleichung zu finden, vermittelft welchen man im Stande ift, aus irgend funf von den angegebenen Studen den das sechste zu finden.

Anfl. 1) Ce fen ABDC (Sig. 18) bas Biered; m, n,

Jufg. Die Grundlinie eines fpharischen Drevedes, ber Unterfchied der beyden Winkel an derfelben, und der Unterfchied feiner Geiten ift gegeben; man foll bas Drevedfinden.

Auff. 1) In dem Drevede (Big. 15) ift gegeben:
AC = b, BAC — ACB = f, BC — AB = g. Die Unter, ichiede A — C, a — c, der Wintel und Seiten find demnach gegeben; es tommt also bloß darauf an die Summen A + C, a + c, au finden.

4) Siergu bient nun bie Formet

Tang.
$$\frac{a-c}{2}$$
 = Tang. $\frac{1}{2}b\frac{\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}(A+C)}$ (\$.32 XLIV), Denn fest man bierin $A-C=f$, $a-c=g$, fo erhold

man:

$$\sin \frac{1}{2}(A+C) = \frac{\text{Tang. } \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}f}{\sin \frac{1}{2}g},$$

worque fic A + C bestimmen laft. 3ch fepe es = h

ander binibirt, fo erhalt man,

Tang. $\frac{1}{4}(A-C)$ = $\frac{\sin \frac{1}{4}(a-c) \cos \frac{1}{4}(a+c)}{\cos \frac{1}{4}(a-c) \sin \frac{1}{4}(a+c)}$ = $\frac{\tan \frac{1}{4}(a-c)}{\tan \frac{1}{4}(a+c)}$ = $\frac{\tan \frac{1}{4}(a-c)}{\cot \frac{1}{4}(a+c)}$ = $\frac{\tan \frac{1}{4}(a+c)}{\cot \frac{1}{4}(a+c)}$ = $\frac{\tan \frac{1}{4}(a+c$

Tang.
$$\frac{1}{2}(a+c) = \frac{\text{Tang.} \frac{1}{2}g \text{ Tang.} \frac{1}{2}h}{\text{Tang.} \frac{1}{4}f}$$

woraus fic a + c bestimmen lagt.

4) Sest man nun a + c = 1; so erhalt man
$$A = \frac{h+f}{2}$$
, $C = \frac{h-f}{2}$, $a = \frac{1+g}{2}$, $c = \frac{1-g}{2}$.

\$ 45

An fg. Der Scheitelwinkel eines fpharifchen Drevect's und die Segmente, in welche bas von der Spige Diefes Winkels auf die Grundlinie gezogene Derpendikel biefelbe theile, find gegeben: man foll bas Dreveck finden.

Aufl. i) In bem Brenede ABC (Fig. 25) fen B ber gegebene Scheitelwintel; bit gegebenen Segmente AD, CD, follen m, n beißen; das unbetannte Perpendifel beiße, ber Rurge wegen, p.

2) Da ABD + DBC = B befannt ift; fo hangt alles bavon ab, ben Unterschied dieser Wintel Segmente, namlich ABD — DBC au finden. Es sen baber ABD — DBC == 1.

Alsdann ift ABD =
$$\frac{B+x}{a}$$
, DBC = $\frac{B-x}{a}$.

3) In den rechtwinkeligen Breweden ABD, BDC, hat man demnach aus VIII. f. 35,

Sin. $p = \text{Tang in Cot. } \frac{1}{4} (B + x)$

Sin, p = Tang. n Cot. $\frac{1}{2}$ (B - x);

folglich Tang, m Cot, $\frac{1}{2}(B+x) = \text{Tang, n Cot, }\frac{1}{2}(B-x)$, shet

$$\frac{\text{Tang.in}}{\text{Tang. n}} = \frac{\text{Cot.} \frac{1}{2} \left(B - x\right)}{\text{Cot.} \frac{1}{2} \left(B + x\right)} = \frac{\text{Tang.} \frac{1}{2} \left(B + x\right)}{\text{Tang.} \frac{1}{2} \left(B - x\right)}.$$

4) Nach (F. 36) ift aber

$$\frac{\text{Tang. } \frac{1}{2} \left(B + x \right)}{\text{Tang. } \frac{1}{2} \left(B - x \right)} = \frac{\sin B + \sin x}{\sin B - \sin x}$$

man hat also

ibbraus man erbalt,

Sin. x = Tang. m - Tang. n

Tang. m + Tang. n

bber,

 $\sin x = \frac{\sin (m - n)}{\sin (m + n)} \sin B$. (3. 44.)

Bufas. Mus diefer Gleichung ergiebt fich ber icone

Das in jedent sphavischen Drevecke, wenn von einem Wintel bestelben auf die gegendber liegende Seire ein Perpenditel herabgelassen wird, der Sinus dieser Setz te sich zum Sinus der Differenz ihrer Segmente eben so verhalte, wie der Sinus des Wintelb zum Sinus der Differenz seiner Segmente.

\$ 46.

Aufg. Aus irgend einer Spige eines fphärischen Drevectes, beffen brey Seiten gegeben find, wird ein Bo, gen eines größten Breifes nach ber gegenüber liegenden Seite gezogen; die Segmente berfelben find gegeben; man foll ben Bogen finbeit.

Aufl. 4) Es fenen, wie immer, a, b, b, die dren geger benen Seiten bes Orenertes ABC (gig. 15); AD mm m, bas aegebene Segmant; BD m x ber gesuchte Vogen.

2) Mach 6 32 IV erhalt man and bem Drepede ABC,

und aus bem Drepede ABD,

3) Seps man diefe benden Werthe des Cos. A kinandet gleich, so entstehet die Gleichung

und hieraus ergiebt fich,

Cos. x = (Cos. à - Cos. b Cos. è) Sin. m + Cos. c Cos. m,
Boraus fich x bestimmen last.

\$ 47.

Aufg. Die drev Seiten eines fpharifchen Drevectes find gegeben; auf einer diefer Seiten wird irgend ein Duntt angenommen, und nus demfelben nach einem ge, gebenen Duntte auf einer anderen Seite des Drevectes ein Bogen gezogen: man foll diefen Bogen finden.

Mufl. 1) Es fepen a, b; o; die bren Geiten bes Dietpe edes ABC (Fig. 16); b', b', die gegebenen Segmente AH, AG; ber gesuchte Bogen GH == x.

2) Man bat alsbann im Drenede ABC,

und im Drepede AGH,

Cos.
$$A = \frac{\text{Cos. } \pm - \text{Cos. } \text{b' Cos. } \text{c'}}{\text{Sin. } \text{b' Sin. } \text{c'}}$$

3) Bieraus ergiebt fic die Gleichung,

bemnach ift,

Cos. x=(Cos. a - Cos. b Cos. c) Sin. b'Sin. e' + Cos. b'Cos. c';
worgns fich x bestimmen lift.

Werben in einem spharischen Drepede ABC (fig. 17) die Sehnen AB, AC, BC, der eben so benannten Bogen gezogen, so schießen diese graden Linien ein Oreped ein, welches ich, der Kurze wegen, das Sehnendreyeck des sphartichen nennen will; die Seiten und Winkel des ersteren, so wie sie den Seizien und Winkeln a, b,* c, A, B, C, des letzteren korrespondiren, sollen durch die Buchkaben a', b', a', a, b, y, ber geichnet werden. In welcher Beziehung das spharische Orepe ach mit seinem Sehnendrepeck stebet, werden die solgenden Ausgaben zeigen.

\$ 49

Aufg. Aus beit gegebenen Seiten eines fohrischen Dreved's Die Seiten Des Sehnenbreved's zu finden, und umgekehrt, jene zu finden, wenn biese gegeben find.

Aufl. i) Die Sehne eines Bogens ift bekanntlich, den Salb, imeffer beffelben für die Einheit angenommen, immer doppelt fo groß als der Sinus feiner Salfte. Man hat Demnach,

a' = 2 Sin. ja, b' = 2 Sin. jb, c' = 2 Sin. jc. Bermittelft diefer Gleichungen laffen fic die Geiten des Gehennenzepeckes aus den Geiten des spharischen bestimmen.

2) Umgetehrt hat man

Sin. ja = ½a', Sin. jb = jb', Sin. jc = ½c'; bber, ba Cos. φ = i - 2 Sin. j φ²,

Cos. α = I - 10'2, Cos. b = 1' - 5b'2, Cos. α = 1 - 10'2, Cos.

Cos a = I - fa's, Cos b = 1' - fb's, Cos c = 1 - fo's. Bermittelft diefer Gleichungen laffen fich die Seiten bes fohder rifchen Breveits aus ben Seiten des Sehnendreped's finden:

\$ 50.

Aufg. Aus ben gegebenen Seiten Des fpharischen Brevecks die Winkel des Sehnendrevecks, und umgekehrt,

ans den gegebenen Seiten des Sehnendrevecks die Win tel des sphärischen zu bestimmen.

Aufl. 1) Aus der ebenen Erigopometrie ist bekannt, das Cos. $\alpha = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'}$.

Berben bierin far a', b', c', ihre Berthe aus i § 49 fubfit wirt, fo erhalt man

$$\cos_{\alpha} \alpha = \frac{\sin_{\alpha} \frac{1}{2} b^{\alpha} + \sin_{\alpha} \frac{1}{2} c^{\alpha} - \sin_{\alpha} \frac{1}{2} a^{\alpha}}{2 \sin_{\alpha} \frac{1}{2} b \sin_{\alpha} \frac{1}{2} c} \dots [\varphi].$$

Eben fo wird gefunden,

Cos.
$$\beta = \frac{\sin \frac{1}{6} a^2 + \sin \frac{1}{6} c^2 - \sin \frac{1}{6} b^2}{2 \sin \frac{1}{6} a \sin \frac{1}{6} c}$$

2) Aus S 32 IV. hat man

Cos. A =
$$\frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b Cos. c}}{\text{Sin. b Sin. c}}$$

Nun ift (§ 49. 2) Cos. $a = 1 - \frac{1}{2}a^{\prime 2}$, Cos. $b = 1 - \frac{1}{4}b^{\prime 2}$, Cos. $c = 1 - \frac{1}{4}c^{\prime 2}$; folglich Sin. $b = V[1 - (1 - \frac{1}{4}b^{\prime 2})]$ = $b^{\prime}V(1 - \frac{1}{4}b^{\prime 2})$, Sin. $c = V[1 + (1 - \frac{1}{4}c^{\prime 2})]$ = $c^{\prime}V(1 - \frac{1}{4}c^{\prime 2})$; werden diese Werthe substitute, und hieraus Babter und Nenner mit 4 multiplicitet, so erhalt man,

$$\mathbf{Cos. A} = \frac{2b'^2 + 2c'^2 - 2a'^2 - b'^2c'^2}{b'c' \ \mathcal{V} \ (4 - b'^2) \ (4 - c'^2)} \dots [\psi]_{\nu}$$

Cos. B =
$$\frac{2a^{12} + ac^{13} - ab^{12} - a^{12}c^{18}}{a^{1}c^{1} V (4 - a^{12}) (4 - c^{12})^{1}}$$

Cos. C =
$$\frac{2a^{12} + 2b^{13} - 2c^{12} - 2^{13}b^{12}}{a^{1}b^{1}V(4 - a^{12})(4 - b^{12})}$$
.

Scometrie II.

Erft. Bufas. Ift das fphartice Drenad gleichfchentelig, und 3. 8. c = b, fo erbalt man aus 1,

Cos.
$$\alpha = \frac{2 \sin \frac{1}{2} b^2 - \sin \frac{1}{2} a^2}{2 \sin \frac{1}{2} b^2} = \frac{\sin \frac{1}{2} a^2}{2 \sin \frac{1}{2} b^2}$$

folglich

i — Cos.
$$\alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha^2}{2 \sin \frac{1}{2} b^2}$$

und hieraus,

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{2\sin \frac{1}{2}b}$$

Ift das fpharifde Dreped gleichfeitig, fo tft auch a = B, folglich Sin. & = 1, und baber & = 300, a = 600; wie auch fenn muß, weil in diesem Kalle das Gehnendreped ebenfalls gleichfeitig wird.

8ment. Buf. Bird in 2, c' = b' gefest; fo giebt bies

Cos.
$$A = \frac{4b^{2} - 2a^{2} - b^{4}}{b^{2} (4 - b^{2})} = 1 \frac{2a^{2}}{b^{2} (4 - b^{2})}$$

folglic

$$1 - \cos A = 2 \sin A = \frac{2a^{2}}{b^{2}}$$

und daher,

$$\sin \frac{a}{4}A = \frac{a'}{b' V (4 - b'^2)}$$

Sur bas gleichfeitige Dreped ift b' = a', folglich,

$$\operatorname{Sin}_{\frac{1}{2}} A = \frac{1}{V_{\frac{1}{2}} - a^{2}}.$$

Aufg. In einem fpharischen Dergede kennet man einen Winkel und die Geiten, welche denselben einschlies gen: man foll den korrespondirenden Winkel des Gehnens dreyede finden.

Ruft. Rach S 152 IV. is

Cos. a = Cos. b Cos. c + Cos. A Sin. b Sin. c,

i — Cos. a — i — Cos. b Cos. c — Cos. A Sin. b Sin. c.

Ann ift aber 1 — Cos. a — 2 Sin. ½ a°; Cos. b — 1 — 2 Sin. ½ b²,

Cos. c — i — 2 Sin. ½ c²; Sin. b — ä Sin. ½ b Cos. ½ b,

Sin. c — 2 Sin. ½ c Cos. ½ c; man bat daher durch die Sub,

kitution dieser Werthe und durch die gehörige Redultion,

Sin. ½ a² — Sin. ½ b² — 4 Sin. ½ b° Sin. ½ c²

and wellin dieser Werth non Sin. ½ b² in der Gleichung [p]

des porigen S's substituter wird,

Cos. a = Sin. & b' Sin. &c + Cos. A Cos & b Cos. &c.

Seen so bat man

Cos. $\beta = \text{Sin.} \frac{1}{2} a \text{Sin.} \frac{1}{2} c + \text{Cos.} B \text{Cos.} \frac{1}{2} a \text{Cos.} \frac{1}{2} c$, Cos. $\gamma = \text{Sin.} \frac{1}{2} a \text{Sin.} \frac{1}{2} b + \text{Cos.} C \text{Cos.} \frac{1}{2} a \text{Cos.} \frac{1}{2} b$.

Buf. In beit gleichschenkligen Drepede, ober wenn

Cos. $\alpha = \operatorname{Sin}, \frac{1}{2}b^{2} + \operatorname{Cos}, A \operatorname{Cos}, \frac{1}{2}b^{2} = \operatorname{Cos}, A + (1 + \operatorname{Cos}, A) \operatorname{Sin}, \frac{1}{2}b^{2},$ Sin. $\frac{1}{2}A^{2}$ für $1 + \operatorname{Cos}, A$ gefeßt,

Cos. $\alpha = \operatorname{Cos}, A + 2 \operatorname{Sin}, \frac{1}{2}b^{2} \operatorname{Sin}, \frac{1}{2}A^{2},$

S 50,

Aufg. 3wey. Geiten und der von ihnen eingeschlossen wirde eines Sehnendrevecks find gegehen: man soll den korrespondirenden sphärischen Winkel finden.

Muft. Aus ber ebenen Bigonometrie ift bekannt, baf in bem gerablinigen Drepede ABC, (Fig. 17),

 $a^{/2} = b^{/2} + c^{/2} - ab^{\prime}c^{\prime}$ Cosia.

Substituirt man diefen Berth des a's in die Gleichung (4) § 50, fo ethalt mim nach gehöriger Reduttion

Cos,
$$A = \frac{4 \cos \alpha - b/c}{V(4 - b/a)(4 - c/a)}$$

Chen fo findet man ferner,

Cos. B =
$$\frac{4 \cos. \beta - \frac{a^2c^2}{V(4 - a^2)}}{V(4 - a^2)}$$

Cos. C =
$$\frac{4 \cos y - a'b'}{V(4 - a'^2)(4 - b'^2)}$$

Buf. Wenn b'= c', d. h. wenn das Gehnenbrepen, folglich auch das fpharifche gleichschenkeitig ift, hat man,

$$\cos A = \frac{4 \cos \alpha - b^{/2}}{4 - b^{/2}},$$

und baber

$$1 - \cos A = \frac{4(1 - \cos a)}{4 - b'a}$$

asée

$$\sin \frac{\pi}{4} A^2 = \frac{4 \sin \frac{\pi}{4} \alpha^2}{4 - b^2}$$

Sin.
$$\frac{1}{2}$$
 A = $\frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha}{V(2+b')(2-b')}$;

welcher Ausbrud' fich mit Sulfe ber Logarithmen febr leicht berechnen lagi.

Anmer? Da Sin. $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b'(\int 49)$, so ift Cos. $\frac{1}{2}b = V(1 - \frac{1}{4}b'^2)$, oder 2 Cos. $\frac{1}{2}b = V(4 - b'^2)$. Demnach ist im gleichschenktigen Orenede,

$$\sin \underline{1} A = \frac{2 \sin \underline{1} \alpha}{V (4 - b^2)} = \frac{\sin \underline{1} \alpha}{Cbs. \underline{1} b'}$$

unb

Sin. $\frac{1}{4}\alpha = \cos \frac{1}{4}b \sin \frac{1}{4}A$;

eine Bleichung, welche die Begiebung gwifchen bem Scheitelmin-

tel bes iphartiden gleichidentligen Drepeds, bem ihm torrefponstirenden Wintel des Sehnendreperts, und dem Schentel des erfteren angiebt. Man flebet auch jugleich hieraus, daß der Scheitelwintel eines ipharischen gleichschenkligen Dreperts ims mer größer ift, als der Scheitelwintel des Sehnendreperts.

5 55.

Aufg. In einem sphärischen Vierede find brey Seir ten und die beyden von ihnen eingeschlossenen Winkel ger geben: man soll das Viered bestimmen.

Aufl. In dem Bierede ABCD (Fig. 18) find gegeben, die drep Seiten AB = m, AC = n, BD = p, und die Bintel BAC = A, ABD = B.

- 1) In dem Drepede ABD fennet man aledann die zwey Seiten m, p, und den von ihnen eingeschloffenen Wintel B, folglich auch die dritte Seite AD, und die Wintel BAD, ADB.
- 2) Sieraus ergiebt fich ferner der Bintel CAD = A BAD.
- 3) Man hat also nunmehr in dem Drepede CDA zwen Seiten AC = n, und AD; folglich auch CD, und die Winv tel ACD, ADC. Auch hat man den Wintel BDC = ADB + ADC. 'Es sind also alle Seiten und Wintel des Viered's bekannt.

\$ 54

Anfg. Zwischen ben vier Seiten eines spharischen Dierecks und zwey gegenüber liegenden Winkeln besselben eine Bleichung zu finden, vermittelft welchen man im Stande ift, aus irgend fünf von den angegebenen Stille den das sechste zu finden.

Anfl. 1) Es fen ABDC (Fig. 18) bas Biered; m, n,

- p, q, feine vier Seiten: BAC = A, BDC = D, swen Ber genwintel beffelben.
- 2) Die Seiten m. n', und der eingeschloffene Bintel A bes Drepede ABC geben:

Cos. BC = Cos. m Cos. n + Sin. m Sin. n Cos. A, und die Seiten p, q, und der eingeschloffene Binkel D bes Orepects DBG,

Cos. BC = Cos. P Cos. q + Sin. p Sin, q Cos. D.

3)_Man hat alfo bie Gleichung:

Cos. m Cos. n + Sin. m Sin. n Cos. A =

Gos. p Cos. q + Sin. p Sin. q Cos. D.

woraus fich, wenn funf Stude gegeben find, bas fechfe ber fimmen laft.

Buf. Die Anwendung dieser Sleichung hat teine Schwieserigteit, wenn einer ber Winkel A, D, que den übrigen Stürfen gesucht wird; um aber eine der Seiten, etwa m au find ben, wenn alles Hebrige gegeben ift, tann man fich eines schon oft angewandten Mittels bedienen. Man dividire name lich die Gleichung durch Cos. n, und sete,

Sin n Cos. A Tang. n Cos. A Tang. u;

alsbann ift wein Bintel, welcher fich leicht finden labt, und bie Gleichung in 3 permanbelt fich in folgende:

Cos. m + Tang. u Sin. m = Cos. p Cos. q + Sin. p Sin. q Cos. D

ober Cos. m Cos. m + Sin. m Sin. m =

(Cos. p Cos. q + Sin. p Sin. q Cos. D) Cos. μ

pher Cos. (m= u)= (Cos. pCos. q + Sin. p Sin. q Cos. D) Cos. n

hieraus laft fic nun m - u, und folglich, da u bekannt ift, auch m bestimmen.

\$ -55.

Anfg. Zwischen ben vier Seiten eines spharischen Vierecks und seinen berden Diagonalen eine Gleichung guginden.

Anfl. 1) Es fen ABDC (fig. 18) das sphärssche Biered; AD, BC, seine berden Diagonaten. Man setze, der Lutze wegen, AB = m, AC = n, BD = p, CD = q, AD = r, BC = s, \(\subseteq BAC = A, \subsete BAD = A', \subseteq CAD = A''.

2) Da A = A' + A", fo ift

Cos. A = Cos. A' Cos. A" — Sin. A'Sin. A";

daher

Sin. A'Sin. A'' == Cos. A' Cos. A'' - Cos. A.
Bird das, was fic auf jeder Seite des Bleichheitszeichens befindet, quadrirt; hierauf 1 - Cos. A'2, 1 - Cos. A'' für Sin. A''2, Sin. A''2 gefest, so erhalt man nach gehöriger Resdution,

3 + 2 Cos. A Cos. A' Cos. A" = Cos. A* + Cos. A/2 + Cos. A/2,

3) Die Drenede BAC, BAD, CAD, geben aber,

$$Cos. A = \frac{Cos. s - Cos. m. Cos. n}{Sin. m. Sin. m}$$

Cos. A = Cos. p - Cos. m Cos. r Sip. m Sin. r

Cos. A"= Cos. q - Cos. n Cos. r Sin. n Sin. r

4) Werben baber biefe Werthe in ber porigen Gleichung fubfitinire, fo erhalt man :

Sin. m² Sin. n² Sin. r² + 2 (Cos. p \rightarrow Cos. m Cos. r) (Cos. q — Cos. n Cos. r) (Cos. s — Cos. m Cos. n) = Sin. m²(Cos. q — Cos. n Cos. r)² + Sin. n²(Cos. p — Cos. m Cos. r)² + Sin. r² (Cos. s — Cos. m Cos. n)².

6) Man setze noch i — Cos.m², i — Cos.n², i — Cos.r² für Sin. m², Sin. n², Sin. r²; badurch entstehet nach ber Res duktion,

1 — (Cos. m² + Cos. n² + Cos. p² + Cos. q² + Cos. r² + Cos. s²) + (Cos. m² Cos. q² + Cos. n² Cos. p² + Cos. r² Cos. s²)

-(2Cos,mCos,nCos,pCos,q+2Cos,mCos,qCos,rCos,s)-0, +2Cos,nCos,pCos,rCos,s

Aus diefer Gleichung latt fic nun jedesmal, wenn funf von den im Sate ermabnten Studen gegeben find, das fechte durch die Auflofung einer quadratifden Gleichung bestimmen.

5 56.

Es sen P (Kig. 19) irgend ein Bunkt auf der Augelstäche, aus welchem die gleichen Bogen größter Rreise PA, PB, PC, PD, PE, unter gleichen Winkeln APB, BPC, CPD, u. s. w. gezogen worden. Werden nun die Endpunkte A, B, C, u. s. w. durch die Bogen größter Rreise AB, BC, CD, u. s. w. werbunden, so entstehet ein sphärisches Bieleck von gleichen Seiten AB, BC, CD, u. s. w. und gleichen Winkeln ABC, BCD, CDE, u. s. w. Denn die Drepecke APB, BPC, u. s. w. sind gleich und gleichscheftlicht; folglich find die Winkel ABP, CBP, BCP, DCP, u. s. w. alle einander gleich; jede zwen hieser Winkel geben aber einen Winkel des Bielecks.

Ein foldes Bieled von gleichen Seiten und Binteln, beift ein regulares fpharifches Bieled. Die Edpuntte bes

felben, A, B, C, u. f. w. liegen in einem Kreife, beffen Pol-P ift. Berbindet inan diese Punkte durch gerade Linien, fo entstehet ein regulares geradliniges Bieled von eben so vielen Seiten als das spharische hat.

•57ء، §

Aufg. Die Anzahl der Seiten eines regularen fpha, rischen Vielech ift gegeben: man foll eine Gleichung zwirschen seiner Seite und seinem Polygonwinkel finden, durch welche man im Stande ift, das eine aus dem anderen zu bestimmen.

Aufl. 1) Es fen bie Anzahl ber Seiten bes Bielecks ABCDE (Fig. 19) = n; fo ift, weil alle Binkel um ben Pol P herum zusammen 4 rechte Binkel ober 360° ausmas den, jeder berfelben = $\frac{360^{\circ}}{n}$; wofür ich, der Kürze wegen, a fetten will.

- 2) Jede von den gleichen Seiten des Mielad's heiße 7, jesder Polygonwinkel, wie BAF, beiße 8, und jeder von den,
 aus dem Punkte P nach den Eden gezogenen Hogen, wie PA;
 beiße \$\phi\$; dieser Bogen halbiret den Polygonwinkel, folglich
 ift BAP = \frac{1}{2}\$.
- 3) Man balbire nun den Bintel APB (=, a) burch ben Bogen PQ; so wird badurch, weil das Preport ARB gleich, schenfelig ift, auch die Seite AB halbirt, und PQ fiehet fenterecht auf AB. Es ift daber APQ = 1a, AQ = 1n.
- 4) In jedem Drenede verhalten fic bie Sinuffe ber Wins tel, wie die Sinuffe der ihnen gegenüber liegenden Seiten; man hat also aus dem Drenede APB,

$$\sin_{\tau} \varphi = \frac{\sin_{\tau} \sin_{\tau} \xi_{in}}{\sin_{\tau} \alpha},$$

und aus dem ben Q rechtwinkeligen Drepede APQ,

$$\sin \varphi = \frac{\sin \frac{1}{2}\eta}{\sin \frac{1}{2}\varphi}$$

3) Wetben biefe berben Ausbrude pon Sin. w einander gleich gefest, fo entflebet bie Bleichung,

$$\frac{\sin \eta \sin \frac{1}{2} \theta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \alpha}$$

pber, da Sin. 4 == 2 Sin. In Cos. In, Sin. a == 2 Sin. I a Cos. Ia, folgende:

Cos.
$$\frac{1}{2}\eta$$
 Sin. $\frac{1}{2}\phi$ = Cos. $\frac{180^{\circ}}{n}$.

6) Bermittelft biefer Bleichung fast fich , beftimmen, wenn n gegeben ift, und umgefehrt. Ran bat namlich

Sin.
$$\frac{1}{4} = \frac{\text{Cos.} \frac{180^{\circ}}{n}}{\text{Cos.} \frac{1}{4} \eta}$$
, $\frac{\text{Cos.} \frac{1}{4} \eta}{\text{Sin.} \frac{1}{4} \theta}$.

Buf: Will man wiffen, wie groß ber Bogen PA = PR = PC = n. f. w. genommen werden muß, wenn die Seite des Bieled's eine gegebene Größe haben foll; so barf man nur in der Gleichung Sin. $\varphi = \frac{\sin \xi \, \eta}{\sin \xi \, \alpha}$ aus 4, für η seinen Werth seben, so erhalt man φ . If der Polygonwintel s gezon, so berechne man guerft die Seite η ; die Uebrige wie gerber.

IV. Flacheninhalt ber fpharifchen Drepede und . Bielede.

\$ 58.

Dulfefåte.

I. Wenn fich zwey größte Areise einer Augel, AMBP, ANBQ, (Fig. 20) einander schneiden, so verhalben fich die gleichen, auf der Oberstäche der Augel entstebenden Streiten AMBNA, APBQA zur ganzen Augelstäche, wie der Reigungewinkel der beyden Areisebenen zu vier rechten Winkeln.

Auf den Durchmeffer AB, worin fic die berben Kreise schneiden, sebe man den größten Kreis MNPQ sentrecht, und ziebe die Durchmeffer MP, NQ; alebann ift MCN der Reise gungswintet der Kreise AMBP, ANBQ, und der Bogen MN das Maaß deffelben. Es kommt demnach bloß darauf an, sy beweisen, daß der Streisen AMBNA fich zur gangen Lugels fliche wie der Bogen MN zur Beripherie MNPQ verhalte.

IR nun dies Berhaltnis rational; so tann man MN: MNPQ = m:n seben, und m, n, gange gablen seyn lassen. Man dente sich alebann die Peripherte MNPQ in n gleiche Sheile gesheift, deren also m auf MN gehen werden; serner durch diese Theilungspunste und den Durchmessen AB größte Kreise gelegt; so wird hierdurch die ganze Rugelstäche in n gleiche Streisen abgerstett, deren in den Streisen AMBNA ausmachen, und er verhalt sich dader dieser Sereh sur Angelstäche wie m zu n, d. h. wie der Bagen MN zur Periphette MNPQ.

IR aber das Berhattnif MN: MNPQ nicht rational, fo laft fic der Beweis auf die befannte Art permittelft der Ers hauftions. Rethode führen.

II. Wenn durch eine Augel nach Willführ drey größ, te Breise (Fig. 21) AMBP, ANBQ, MNPQ, gelegt wers den; so ist die Summe der, in derselben Salbfugel ties genden, spharischen Drevecke AMN, APQ, jedesmal dem Streisen AMBNA gleich.

Denn es ist Salbtreis APB — Salbtreis MBP; folglich APB. — BP = MBP — BP, b. h. AP = BM. Auf eine Shnliche Aet wird bewiesen, daß BN = AQ, MN = PQ. Die sphärlichen Orenede BMN, APQ, haben bemnach gleiche Seiten, wie auch gleiche Winkels folglich find sie einander gleich. Demnach ist AMN + APQ = AMN + BMN = Streisen AMBNA.

Buf. Aus diesem und dem vorhergebenden Save folge, bağ die Summe der bepden spharischen Drepede MAN, PAQ, fich zur ganzen Augelfidde, wie der spharische Wintel MAN, (ber dem Reigungswinkel der Areisstächen AMBP, ANBQ, gleich ift,) zu vier rechten Winteln verhalt.

Bezeichnet man daher die Rugelfliche durch 8, die Sums ime ber Drepede MAN, PAQ, durch s, und ben Wintel MAN durch A, so ift, wenn dieser Wintel in Graben geges ben ift, $s=\frac{A}{360^\circ}$. S.

§ 59:

Aufg. Die drey Winkel eines fpbarifchen Drevedes find gegeben: man foll den Slacheninhalt deffelben finden.

Aufl. 1) Es fen ABC (Fig. 22) bas sphartiche Drenech, DFGI irgend ein größter Rreis auferhalb beffelben, und die Beiten des Orenecks so weie versangert, bis fie Die Perbyder rie dieses Kroises treffen.

2) Alsdann ift nach dem vorigen 5,

$$\triangle \text{HAG} + \triangle \text{DAE} = \frac{A}{360^{\circ}}. \text{ S};$$

und eben fo,

$$\triangle DBI + \triangle FBG = \frac{B}{360^{\circ}}$$
. s,

$$\triangle FCE + \triangle HCI = \frac{C}{2660}.8;$$

folglich,

$$\begin{bmatrix} \triangle HAG + \triangle DBI + \triangle FCE \\ + \triangle DAE + \triangle FBG + \triangle HCI \end{bmatrix} = \frac{A + B + C}{360^{\circ}} \cdot 8$$

3) Die Summe der Drepede zur Linten dieser Gleichung übertriffe die Halblingel um das doppelte Dreped ABC3, folgelich, ift

$$\frac{1}{4}S + 2\triangle ABC = \frac{A+B+C}{360^{\circ}}. s,$$

and daher,

$$\triangle ABC = \frac{A+B+C-180^{\circ}}{720^{\circ}}$$
. S.

Bufas. Aus diefem Refultate ergiebt fich ber folgens de Sas:

Jedes Augeldreyed verhalt fich jur gangen Augelflas de, wie der Ueberfchuf der Summe feiner drey Wins tel aber zwey Rechte, zu acht Rechten.

Benfpiel. Es sen $A = 43^{\circ} 20'$, $B = 79^{\circ} 9' 59''$, $C = 82^{\circ} 34' 6''$; hier ift, $A + B + C - 180^{\circ} = 25^{\circ} 4' 5''$, und daher,

$$\triangle$$
ABC = $\frac{25^{\circ} 4' 5''}{7^{20^{\circ}}}$. S;

over, went man bie Grade und Minuten in Gebrübgil ver wandelt,

$$\triangle ABC = \frac{90246}{2592000}; S = 0,0348167 \cdot S.$$

Mufg. Den Glacheninhalt eines fpharifchen Dielecks

Aufl. Es fen ABCDE (gig. 23) trgend ein Bieted, und aus einem Bintel beffelben, A, nach allen anderen Binteln bie Diagonalen AC, AD, gezogen; so wird hierdurch bas Diefect in so viele Drenecke gerlegt; als es Seiten weniger awer bat-

Es feij num a bie Summe ber Wintel bes Pteleds, a', a'', a'', 1c, die Gummen der Wintel in ben Dreveckun, worden es gerlegt worden, ni die Angahl feiner Seiten; fo ift (\$ 59)

$$\triangle ABC = \frac{s' - 180^{\circ}}{720^{\circ}} S,$$

$$\triangle ACD = \frac{s'' - 180^{\circ}}{720^{\circ}} S,$$

$$\triangle ADE = \frac{s''' - 180^{\circ}}{720^{\circ}} S,$$
ii. j. w.

folglic

bber ba s' + s" + s" + ... = s,..

Foling: ABCDE... =
$$\frac{s.-(n-9)}{720^6}$$
 S.

Buf. Es bezeichne D bie Summe aller außeren Bintel

der spharischen Figur. Alebann ift s + 2 mm n. 180°, und s = n. 180° — D; folglich,

- Poing. ABCDE
$$\therefore = \frac{560^{\circ} - \Sigma}{720^{\circ}}$$
 S.

D. b. Das Wieled verhale fich jur gangen Rugelflache, wie die Differeng zwischen vier rechten Winteln und der Summe aller außeren Wintel des Vieleck, ju acht rechten Winteln.

Aufg Jus ber gegebenen Geite eines regularen fpharifchen Vieled's ben Glacheninbalt beffelben ju, finden.

Aufl Es fen n die gegebene Seite des Bieleds, s ber mbetannte Polygonipintel deffelben. Diefen Bintel erhalt man aus det Gleichung (§ 57)

$$\sin \frac{180^{\circ}}{1}$$

$$\cos \frac{180^{\circ}}{1}$$

$$\cos \frac{1}{1}$$

Sat man aus diefet Gleichung ben Mintel i gefinden, fo herf man nur in § 60 ne fact a fegen; inan erhalt alebann, wenn g ben Blacheninhalt bes Bielecte bezeichnet,

$$q = \frac{ns - (n - s) 180^{6}}{780^{6}} 8;$$

ober auch, wenn & ben duferen Bintel bes Bictelle begeichnet.

$$q=\frac{360^\circ-n\theta'}{720^\circ}\,\mathrm{S}.$$

Benfp. Fut bas Rugelquadrat, d. h. für bas sphartice Biered, welches lauter gleiche Seiten und gleiche Bintel bat, ift n = 4. Es set nun die Seite bieses Quadrates = 2°, und der gidcheninhalt eines solchen Quadratgrades gu finden. Sier ift n = 1°, und baber nach volger Formel

Sin. $\frac{1}{2} = \frac{\text{Cos.} 45^{\circ}}{\text{Cos.} 30^{\circ}}$ Hieraus findet man $\frac{1}{2} = 45^{\circ}$ o' 8° bennahe; folglich $q = \frac{64}{720.3600}$ S $= \frac{1}{40500}$ S. Das Rugels

quadrat, deffen Seite = 1°, ift demnach in der gangen Lus gelfidche ungefahr 40500 mal enthalten.

Aufg. Gin regulares fpharifches Vieled von einer bestimmten Anzahl der Seiten zu finden, von welchem die Augelfiaches ift.

Auft. Angenommen, bas Bieled folle ber mie Theil ber Mugelfidde fenn; fo bat man, (§ 61),

$$\frac{n\ell - (n-2) \cdot 180^{\circ}}{720^{\circ}}$$
 S. $= \frac{1}{m}$ S,

und daher

$$a = \frac{720^{\circ}}{mn} + \frac{n-2}{n}$$
 180°.

Dat man hieraus ben Bintel o bestimmt, fo bat man auch 7,

$$\cos \frac{1}{2} q = \frac{\cos \frac{180^{\circ}}{n}}{\sin \frac{1}{2} \theta}$$

Anmert. Es verdient hierben bemerkt zu werben, daß, wenn auch die Augelfiche ein Bielfaches irgend eines spharts schen Bieleckes ift, doch noch keinesweges daraus folge, duß sich die Augelfiche ganz mit solchen Vielecken belegen lasse, oder daß sich aus diesen Vielecken ein Neg verfertigen lasse, womit die ganze Augelfiche bedeckt werden könne: denn das eine folgt eben so wenig aus dem anderen, als sich daraus, daß ein Oreped der hunderte Sheil eines Quadrates ift, schlies sien läst, es können hundert solche Orepede in das duadrat gesete

gefest werden. Die folgenden Aufgaben werden zeigen, in welchen Fallen fo etwas fur bie foharifden Bietelle in him ficht auf die Augelflache flatt findet.

5" By 100 1

Aufg. Unter allen fpbarischen gleichfeirigen Dreveden diejenigen zu bestimmen, aus welchen sich ein Weg für die Augelstäche verfetrigeit läßt.

Aufl. 1) Man denke fich die gleichfeitigen Drepede auf ber Augelfidche fo aneinander gefügt, daß sowohl ibre Seiten als Wintel völlig schließen und keinen leeren Plag auf berselben abrig laffen. Um seben Winkelpunkt diefes Neges liegen als, dann nothwendig gleich viele Drepede, weil keiner von bem anderen in irgend etwas verschleden fepn kann.

- 2) Die Bintel ber Drepede, von welchen jeder folder Puntt umgeben ift, muffen den Raum rings um ihn ausfüllen, und teine Leere amischen fich laffen; also muß ihre Summe. 360° betragen. Benn also & den Bintel des gleichseitigen. Drepede bezeichnet, und p die Anzaht dieser Wintel um jeden Bintelpuntt; so muß Pe = 360° senn.
- 5) Aus 5 62 erhalt man aber, menn n = 3 gefest wirb,

$$P\left(\frac{240^{\circ}}{m} + 60^{\circ}\right) = 360^{\circ}$$

woraus man, erhält,

$$m = \frac{4P}{6-P}$$

4) hier muß p>1 und <6 fenn. Man fest alfo an flatt biefes Suchftabens alle Werthe, Die er haben tinn, fo hat man,

Geometrie IL.

Sin. m² Sin. n² Sin. r² + 2 (Cos. r) — Cos. m Cos. r) (Cos. q — Cos. n Cos. r) (Cos. s — Cos. m Cos. n) = Sin. m²(Cos. q — Cos. n Cos. r)² + Sin. n²(Cos. p — Cos. m Cos. r)² + Sin. r² (Cos. s — Cos. m Cos. n)².

5) Man fege noch i - Cos.ma, i - Cos.na, i - Cos.ra für Sin. ma, Sin. na, Sin. ra; baburch entstehet nach ber Res buttion,

1 — (Cos. m² + Cos. n² + Cos. p² + Cos. q² + Cos. x² + Cos. x² + Cos. x² + Cos. x² Cos. x² + Cos. x² Cos.

+(2Cos, m Cos, n Cos, s'+ 2Cos, m Cos, p Cos, r + 2Cos, n Cos, q Cos, r+ 2Cos, p Cos, q Cos, s)

-(2Cos.m Cos.n Cos.p Cos.q+2Cos.m Cos.q Cos.r Cos.s) = o. +2Cos.n Cos.p Cos.r Cos.s

Aus diefer Gleichung latt fic nun febesmal, wenn funf von ben im Sate ermabnten Studen gegeben find, bas fechte burd bie Auftofung einer quadratifchen Gleichung bestimmen.

§ 56.

Es sen P (Rig. 19) irgend ein Bunkt auf der Augelsiche, aus welchem die gleichen Bogen größter Rreise PA, PB, PC, PD, PE, unter gleichen Winkeln APB, BPC, CPD, u. s. w. gezogen worden. Werden nun die Endpunkte A, B, C, u. s. w. durch die Bogen größter Kreise AB, BC, CD, u. s. w. werbunden, so entstebet ein spharisches Bieleck von gleichen Seiten AB, BC, CD, u. s. w. und gleichen Winkeln ABC, BCD, CDE, u. s. w. Denn die Prepecke APB, BPC, u. s. w. sind gleich und gleichschenklicht; solglich find die Winkel ABP, CBP, BCP, DCP, u. s. w. alle einander gleich; jede zwen hieser Winkel geben aber einen Winkel des Bielecks.

Ein solches Bieled von gleichen Seiten und Winteln, beift ein regulares spharisches Bieled. Die Edpuntte bei

felben, A, B, C, u. f. w. liegen in einem Kreise, beffen Pol.

P ift. Berbindet man diese Punkte durch gerade Linien, so entstehet ein regulares geradliniges Mieled von eben so vielen Geiten als das spharische hat.

\$._~57•

Aufg. Die Anzahl der Seiten eines regularen fpba, rifchen Vielede ift gegeben: man foll eine Gleichung zwir ichen feiner Seite und seinem Polygonwinfel finden, durch welche man im Stande ift, das eine aus dem anderen zu bestimmen.

Anfl. 1) Es sen die Anzahl der Seiten des Bielecks ABCDE (Fig. 19) = n; soiff, weil alle Winkel um den Pol P herum zusammen 4 rechte Winkel oder 360° ausmaschen, jeder derselben = $\frac{360^{\circ}}{n}$; wofür ich, der Kürze wegen, α setzen will.

- 2) Jede von den gleichen Seiten des Bielack beife q, jesder Polygonwinfel, wie BAE, beife e, und jeder von den,
 aus dem Punte P nach den Eden gezogenen Bogen, wie PA;
 beife o; dieser Bogen halbiret ben Polygonwintel, folglich
 ift BAP = 14.
- 3) Man halbire num den Winkel APB (= a) burch den Bogen PQ; so wird dadurch, weil das Preped APB gleich, schellig ift, auch die Seite AB halbirt, und PQ flebet senk recht auf AB. Es ift daher APQ = 1a, AQ = 17.
- 4) In jedem Drenede verhalten fich die Sinuffe der Bins tei, wie die Sinuffe der ihnen gegenüber liegenden Seiten; man hat also aus dem Orenede APB,

$$\sin_{\tau} \varphi = \frac{\sin_{\tau} \eta \sin_{\tau} \frac{1}{2} \theta}{\sin_{\tau} \alpha},$$

und aus dem ben Q rechtwinkeligen Drepede APQ,

$$\sin \varphi = \frac{\sin \frac{1}{2}\eta}{\sin \frac{1}{2}\eta}$$

5) Werben biefe berben Ausbrude pon Sin. w einander gleich gefest, fo entflebet bie Bleichung,

$$\frac{\sin \eta \sin \frac{1}{2} \theta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \alpha}$$

pder, da Sin. 7 == 2 Sin. In Cos. In, Sin. a == 2 Sin. I a Cos. I a, folgende:

Cos.
$$\frac{1}{4}\eta \sin \frac{1}{4}\phi = \cos \frac{1}{4}\alpha = \cos \frac{180^{\circ}}{n}$$
.

6) Bermittelft biefer Bleichung fast fich , beftimmen, wenn n gegeben ift, und umgefehrt. Man bat namlic

Sin.
$$\frac{1}{4} = \frac{\text{Cos.} \frac{180^{\circ}}{n}}{\text{Cos.} \frac{1}{4} \eta}$$
, $\frac{\text{Cos.} \frac{1}{4} \eta}{\text{Sin.} \frac{1}{4} \theta}$.

Bus: Will man wissen, wie groß ber Bogen PA = PR = PC = u. s. w. genommen werden muß, wenn die Seite des Bielecks eine gegebene Größe haben foll; so darf man nur in der Gleichung Sin. $\varphi = \frac{\sin \xi \eta}{\sin \xi \alpha}$ aus 4, für η seinen Werth steen, so erhält man φ . If ver Polygonwintel s gen geben, so berechne man querft die Seite η ; das Uebrige with gerber.

IV. Flacheninhalt ber fpharifchen Drepede und . Wielede.

\$ 58.

Dulfsfase.

I. Wenn fich zwey größte Areise einer Augel, AMBP, ANBQ, (Fig. 20) einander schneiden, so verhalten fich die gleichen, auf der Oberstäcke der Augel entstebenden Strett fen AMBNA, APBQA zur ganzen Augelstäche, wie der Reigungswinkel der beyden Areisebenen zu vier rechten Winkeln.

Auf den Durchmeffer AB, worin fic die beiden Kreissichen, sebe man den größten Kreis MNPQ senkrecht, und ziehe die Durchmeffer MP, NQ; alsbann ift MCN der Reissungswinkel der Kreise AMBP, ANBQ, und der Bogen MN das Maaß defielben. Es kommt demnach bloß darauf an, sy beweisen, daß der Streisen AMBNA sich sur gangen Rugels siche der Bogen MN gur Beripherie MNPQ verhalte.

IR nun dies Berhalinis rational; so tann man MN: MNPQ = m:n segen, und m, n, gange gablen seyn laffen. Man dente fic alebann die Peripherse MNPQ in n gleiche Theile getheitt, deren also m auf MN gehen werden; ferner durch diese Theilungspunkte und den Durchmesser AB größte Areise gelegt; so wird hierdurch die gange Augeisiche m gleiche Gereifen abgeiselt, deren m den Greises in n gleiche Gereifen abgeiselt, deren m den Greises AMBNA ausmachen, und es verhalt fich daher dieser Sueh sur Augelsiche wie m ju n, d. h. wie der Bagen MN jur Periphetse MNPQ.

IR aber das Berhaltnif MN: MNPQ nicht rational, fo laft fich ber Beweis auf die betannte Art permittelft der Ers hauftions : Methode führen.

II. Wenn durch eine Bugel nach Willführ drey größ, te Breise (Fig. 21) AMBP, ANBQ, MNPQ, gelegt werden; so ist die Summe der, in derselben Saldfugel ites genden, spharischen Drevecke AMN, APQ, jedesmal dem Streisen AMBNA gleich.

Denn es ift Salbkreis APB = Salbkreis MBP; folglich APB, — BP = MBP — BP, b. h. AP = BM. Auf eine schnliche Aet wird bewiesen, daß BN = AQ, MN = PQ. Die sphartichen Orenecke BMN, APQ, haben demnach gleiche Seiten, wie auch gleiche Winkel; folglich find sie einander gleich. Demnach ist AMN + APQ = AMN + BMN = Streifen AMBNA.

Buf. Aus diesem und dem vorhergebenden Sate folge, baß die Summe der benden spharischen Drepede MAN, PAQ, fich jur gangen Augelfidde, wie der spharische Wintel MAN, (ber dem Reigungswintel der Kreisstächen AMBP, ANBQ, gleich ift.) zu vier rechten Winteln verhalt.

Bezeichnet man daher die Rugelfidde durch 8, die Sums ime ber Drepede MAN, PAQ, durch s, und den Winkel MAN durch A, so ift, wenn dieser Winkel in Staden geges ben ift, s = $\frac{A}{360^{\circ}}$. S.

\$ 59·

Aufg. Die brey Winkel eines sphärischen Dreveckes find gegeben : man foll den Slächeninhalt besselben finden.

Aufl. r) Es fen ABC (Fig. 22) das sphartiche Dreneck, DFGI irgend ein größter Rreis außerhalb beffelben, und die Beiten des Drened's fo wele verfangert, bis fie die Peripherite diefes Kreises treffen.

2) Alsdann ift nach bem vorigen 5,

$$\triangle \text{HAG} + \triangle \text{DAE} = \frac{A}{360^{\circ}}$$
. S;

und eben for

$$\triangle DBI + \triangle FBG = \frac{B}{360^{\circ}}. s_{,}$$

$$\triangle$$
 FCE + \triangle HCI = $\frac{C}{560}$. 8;

folglic,

$$\begin{bmatrix} \triangle HAG + \triangle DBI + \triangle FCE \\ + \triangle DAE + \triangle FBG + \triangle HCI \end{bmatrix} = \frac{A + B + C}{360^{\circ}}.$$

3) Die Summe der Drepede zur Linken diefer Gleichung übertrifft die halblugel um das doppelte Oreped ABC; folge lich, ift

$$48 + 2\triangle ABC = \frac{A+B+C}{360^{\circ}}.s,$$

and daher,

$$\triangle ABC = \frac{A+B+C-180^{\circ}}{7^{20^{\circ}}}$$
. s.

Bufas. Aus diefem Resulente ergiebt fich ber folgens de Sag:

Jedes Augeldreyed verhalt fich jur gangen Augelflas che, wie ber Ueberfchuf der Summe feiner drey Wins tel aber zwey Rechte, zu acht Rechten.

Benfpiel. Es sen $A = 43^{\circ} 20'$, $B = 79^{\circ} 9' 59''$, $C = 82^{\circ} 34' 6''$; hier ift, $A + B + C - 180^{\circ} = 25^{\circ} 4' 5''$, und daber,

$$\triangle ABC = \frac{25^{\circ} 4' 5''}{720^{\circ}} \cdot 8;$$

ober, wend man bie Grabe und Minuten in Gebunbeil ver, wanbelt,

$$\triangle ABC = \frac{90246}{2592000}; S = 0,0348167. S.$$

§ 60

Mufg. Den flacheninhalt eines fpharifchen Dielecks aus feinen Winkeln gu finden.

Aufl. Es fen ABCDE (gig. 23) irgend ein Bieled, und aus einem Bintel beffelben, A, nach allen anderen Binteln bie Diagonalen AC, AD, gezogen; fo wird hierdurch bas Bieled in fo biele Dreyeite zerlegt, als es Seiten weniger zwey hat.

Es feit num a bie Summe ber Wintet bes Bielech, a', a'', a'', 1c , bie Gummen ber Wintel in ben Drevecken, word in es gerlegt worden, n bie Angahl feiner Seiten; fo ift (\$ 59)

$$\triangle ABC = \frac{s' - i80^{\circ}}{720^{\circ}} 8,$$

$$\triangle ACD = \frac{s'' - i80^{\circ}}{720^{\circ}} 8,$$

$$\triangle ADE = \frac{s''' - i80^{\circ}}{720^{\circ}} 8,$$
if, f. 196

folglid

polyg. ABCDE...=[s]+4"+s"+...+(n=2)1800] 8
7200;

bber ba s' + s" + s" + ... = s,

 $\text{polyg.ABCDE...} = \frac{s. - (n-s) \ 180^{6}}{720^{6}} \ S.$

Buf. Es bezeichne D bie Summe aller außeren Bintet

ber spharischen Figur. Alebann ift a + 2 = n. 180°, und s= n. 180° - E; folglich,

Poing. ABCDE...
$$=\frac{560^{\circ}-\Sigma}{720^{\circ}}$$
 8.

D. Das Wieled verhalt fich sur gangen Augelflache, wie Die Differeng zwischen vier rechten Winkeln und ber Summe aller außeren Winkel Des Vieleck, ju acht rechten Winkeln.

Aufg Aus der gegebenen Geite ethes regularen fpharifchen Vieled's den Slacheninbalt deffelben gu finden.

Anfl. Es fen n die gegebene Seite des Bielecks; # der mbetannte Polygonmintel deffelben. Diefen Wintel erhalt man aus det Gleichung (§ 57)

Dat man aus biefet Gleichung ben Mintel i gefingen, fo hert man nur in § 60 in ftart a fegen; man erhalt ulebann, wenit q ben Blacheninhalt bes Bielecks bezeichnet,

$$q = \frac{n_f - (n - 2) \cdot 180^6}{720^6} 8;$$

, sber auch wenn & ben aufeien Bintel bes Bielbife begeichnet,

$$q = \frac{360^{\circ} - n\theta'}{720^{\circ}} S.$$

Benfp. gut bas Rugelquabrat, d. f. fir bas iphartice Biered, welches lauter gleiche Seiten und gleiche Bintel hat, ift n = 4. Es fer nut bie Seite biefes Quabrates = 1°, und ber gidcheninhalt eines folden Quabratgrabes gu finden. Sier ift q = 1°, und baber nach volger germel

8in. ½ , = Cos. 30'. Steraus findet man £ , = 45° o' 8"

bennabe; folglich $q = \frac{64}{720.3600}$ S $= \frac{1}{40500}$ S. Das Rugels quadrat, deffen Seite $= 1^{\circ}$, if demnach in der gangen Rus

quadrat, deffen Seite = 1°, if demnach in der ganzen Rus gelfidche ungefahr 40500 mal enthalten.

§ 62.

Aufg. Ein regulares fpharifches Vieled von einer bestimmten Anzahl der Seiten zu finden, von welchem die Augelfiache ein gegebenes Belfaches ift.

Aufl. Angenommen, das Bieled folle ber mit Theil der Rugelfilche fenn; fo hat man, (§ 61),

$$\frac{n \ell - (n-2) \ 180^{\circ}}{7^{20^{\circ}}} S = \frac{1}{m} S_{r}$$

und daher

$$r = \frac{720^{\circ}}{mn} + \frac{n-2}{n}$$
 180°.

Dat man hieraus ben Winkel & bestimmt, fo bat man auch 7,

$$\cos \frac{1}{2} \eta = \frac{\cos \frac{180^{\circ}}{n}}{\sin \frac{1}{2} \theta}$$

Unmert. Se verdient hierben bemerkt zu werden, daß, wenn auch die Augelfliche ein Bielfaches irgend eines sphärks schen Bieleckes ift, doch noch keinesweges daraus solge; duß sich die Augelfliche ganz mit solchen Vielecken belegen lasse, oder daß sich aus diesen Vielecken ein Nep verfertigen lasse, womit die ganze Augelfliche bedeckt werden konne; denn das eine folgt eben so wenig aus dem anderen, als sich daraus, daß ein Oreveck der hunderte Theil eines Quadrates ist, schlies sien läst, es können hundert solche Orevecke in das Duadrat gesets

gefest werden. Die folgenden Aufgaben werden zeigen, in welchen Follen fo etwas fur Die fphariften Bielede in him fiche auf die Augelfliche fatt findet.

Aufg. Unter allen fpharischen gleichseitigen Drevellen biejenigen zu bestimmen, aus welchen sich ein Wen für die Augelfläche versetrigeit läft.

Aufl. 1) Man denke fic die gleichfeitigen Drepede auf ber Augelfidde fo aneinander gefügt, daß sowohl ihre Seiten als Wintel völlig schließen und keinen leeren Plas auf berselben abrig lasen. Um seben Wintelpunkt dieses Neyes liegen als, dann norhwendig gleich viele Drepede, weil keiner von bem anderen in irgend etwas verschieden sepn kann.

- 2) Die Winkel ber Drepede, von welchen jeder solcher Punkt umgeben ift, muffen den Raum rings um ihn ausfüllen, und keine Leere zwischen fich laffen; also muß ihre Summe. 360° betragen. Wenn also ben Winkel des gleichseitigen. Dreped's bezeichnet, und p die Anzaht dieser Winkel um jeden Winkelpunkt; so muß ps = 360° senn.
- 3) Aus § 62 erhalt man aber, wenn n = 3 gefest wird, $i = \frac{240^{\circ}}{m} + 60^{\circ}$; man hat ulfo die Gleichung,

$$p\left(\frac{240^{\circ}}{m} + 60^{\circ}\right) = 360^{\circ}$$

worans man erhalt,

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{4}\mathbf{p}}{\mathbf{6} - \mathbf{p}}$$

4) hier muß p>1 und <6 sen. Man sete alfo ans fatt dieses Suchfabens alle Werche, die er haben tinn, so hat man,

Geometrie II.

5) Ift nun q die Beite ben Drepede, fo ift (\$ 57. 6)

Cos.
$$\frac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos. } 60^{\circ}}{\text{Sin. } \frac{1}{2} \delta} = \frac{1}{2 \text{Sin. } \frac{1}{2} \delta}$$

und wenn hierin nach und nach fur s feine in 4 angegebenent möglichen Werthe gefest werden,

 $\eta = 120^{\circ}, 109^{\circ} 28' 16'', 90^{\circ}, 63^{\circ} 26' 6''.$

6) Diese Groffe mussen die Seiten des Orcnede haben, wenn fie die Bedingungen der Aufgabe erfüllen sollen, und solder Drepecke geben also entweder 2, oder 4, oder An oder, 20 auf die Rugelfläche Das erfte Prepeck ist nichts anders, als die halbe Augelfläche selbst, die drep Seiten desselben, jeste von 120°, liegen alle in der Ebene eines größten Rreises, es kann daber nicht wohl zu den spharischen Breneden gezählt werden. Es giedt also eigentlich nur drep spharische Diepecke, weiche die erforderliche Eigenschaft haben.

Anfirer? Die Sehnendrenede, weiche ben gefundenen fpbarifchen Dreneden entsprechen, bilben bie Geitenflachen ber reguldten Rorper, welche unter bem Namen Letraeber, Dt. taeber, Itofaeber, befanne find; wovom weiterhin mehr vor tommen wird.

. 64.

Aufg. Unter allen Augelquabraten biejenigen gu ber fimmen, welche ein Wen für die Augelflache geben!

Aufl. 1) Aus 5 54 hat man, wenn, n = 4 gefest wird, $t = \frac{180^{\circ}}{m} + 90^{\circ}$; und dieses ist der Winkel des Augelquadrastes, Liegen align in derselben um johen Minfolpunkt, so muß sen.

$$p\left(\frac{18b^{\circ}}{m} + 90^{\circ}\right) = 560^{\circ}$$

hieraus wirb gefunden,

$$m=\frac{3p}{4-p}.$$

- 2) Es mus demnach p größer als seund kleiner als 4 ans genommen werden. Für p = 2 ift m = 2, und für p = 5 ift m = 6. Für p = 2 ist ber Polygonwinkel s = 180°; also das Viered ein größter Areis in seine Duadranten gestheilt; die Fläche desselben die halbe Augelstäche: dieses Quadrat kann daber nicht gebraucht werden. Für p = 5 erhalt man s = 120°; und dies ist der Winket des gesuchten Quadrates. Es giebt also nur ein Quadrat, welches die verlangs te Eigenschaft hat.
 - 3) gur die Seite deffelben bat man die Gleichung,

$$\cos \frac{\pi}{2} \eta = \frac{\cos 45^{\circ}}{\sin \frac{\pi}{2} \theta},$$

worans n'= 700.32/ 44M gefunden wird.

Buf. Die Entfernung ber Bintespuntie biefes Quabru :: teb von dem Bole bes umichriebenen Rreifes werd ans 9 575 Buf. gefunden. Biet ift namich am 900, und daber,

woraus q = 54°44'8" erhalten mitb.

Das gerudtinige Quodrat, welches burch der Berbindung. ber Bintelpuntte bes sphatischen durch gerade Linten erhalben wird, ift übrigens die Seitenfläche eines in der Augel beschrie, benen Cubus.

§ 65.

Aufg. Das febarifche Funfed ju findeny welches ein len ber Augelflache giebe. Aufl. 1) hier muß in ber Formel far & (§ 62), n = 5 gefest werden; man findet hierdurch & = \frac{1446}{m} + 1080. Liefgen nun um jeden Winkelpunkt p gunfede; so muß fenn.

$$p\left(\frac{144^{\circ}}{m} + 108^{\circ}\right) = 360^{\circ}$$

mpraus man

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{4p}}{\mathbf{10} - \mathbf{3p}}$$

erbåjt.

Ma) Aus p = 2, folgt m = 2; das Ney bestehet aus zwen halblugeln. Für p = 3, wird m = 12; folglich \$ == 120°, und aus \$ 57

Cos.
$$\frac{1}{2} \eta = \frac{\text{Cos. } 36^{\circ}}{\text{Sin. } 60^{\circ}};$$

moraus man $\eta = 41^{\circ}48'36''$ erhalt.

Anmert. In § 63, 64, 65, wurde gezeigt, wie bie reguldren spharischen Orenede, Biereitz, Fünsede gefunden werden, aus welchen fich ein Nes für die Augelfidche zusammenispen läßt. Rehr als funf Seiten darf aber ein solches Bieleck nicht haben, wenn, wie hier immer geschehen ift, nur eine Art von Bielecken zugelassen wird,. Denn in jedem Winskelpunkte des Noges muffen wenigkens dren Polygonwinkel zu, sammen koben, deren jeder nothwendig kleiner als 120° senn much. Dem Ausdrucke für den Polygonwinkel zin § 62 kann man aber spigende Farm geben:

$$+\frac{7200}{mn}+(1806-\frac{2}{n}1800);$$

und von diefem Ausdrucke ift ber, in Rlammern eingeschloffes ne Cheil allein ichen so groß oder großer als rade, das enfere nämlich für n = 6, das zwepte für n > 6. Der Kall p = a wird hier ausgefchloffen, weil er nichts anders als Salbtus geln fur die Bielede giebt.

5 66,

Aufg. 3wey Seiten sines, sphärischen Dreved's nebst dem davon eingeschlossenn Winkel sind gegeben; man soff den glächeninhalt des Dreved's finden.

Aufl. 1) Man durfte nur die benden übrigen Bintel bes foddrifden Dreped's suchen, und hierauf nach \$ 59 ben Inhalt besielben aus feinen drep Binteln berechnen.

- 2) Es lagt fic aber auch eine einfache Formel finden, wodurch man den Ueberschus der bren Binkel des Drepecks über 180° unmittelbar erhalten kann.
- 3) Es fen A der gegebene Winkel, also b, c, die geges benen Seiten; ferner sen, der Africe wegen, A + B + C 1800 = \(mu_0\) und daher Tang. \(\frac{1}{2}(A + B + C) = \text{Tang.}(900 + \frac{1}{2}\mu) = \text{Cot.}\(\frac{1}{2}\mu_0\)
 - 4) Es ift aber

Tang.
$$\frac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}A+\text{Tang.}\frac{1}{2}(B+C)}{1-\text{Tang.}\frac{1}{2}A\text{ Tang.}\frac{1}{2}(B+C)}$$

oder, wenn man hierin fur Tang. I(P+C) seinen Werth aus 32 XLIX. sest, und Icher und Nenner mit Cos I (c+b) multipliciet,

Tang.
$$\frac{1}{a}$$
 (A + B + C) =

Tang. $\frac{1}{a}$ Cos. $\frac{1}{a}$ (c + b) + Cot. $\frac{1}{a}$ A Cos. $\frac{1}{a}$ (e - b)

Cos. $\frac{1}{a}$ (c + b) - Cos. $\frac{1}{a}$ (c - b)

5) Dem Sahler Diefes Bruches laft fic, ba

Tang.
$$\frac{\pi}{2}A = \frac{\sin \frac{\pi}{2}A}{\cos \frac{\pi}{2}A}$$
, Cot. $\frac{\pi}{2}A = \frac{\cos \frac{\pi}{2}A}{\sin \frac{\pi}{2}A}$,

Cos. $\frac{1}{2}$ (c \pm b) = Cos. $\frac{1}{2}$ c Cos. $\frac{1}{2}$ b \mp Sin. $\frac{1}{2}$ c Sin. $\frac{1}{2}$ b, folgende Form geben:

oder, da Sin. \$A* + Cos. \$A* = 1, Cos. \$A* - Sin, \$A* = Cos. A, Sin. \$A Cos. \$A = 2 Sin. A, blefe:

$$2 \cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} b + 2 \sin \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} b \cos A$$
Sin. A

Der Nenner ift = - 2 Sin. & c Sin. & b,

6) Demnad erhalt man,

oden, da Tang. I (A + B + C) = - Cot. I m

$$\frac{Cos. \frac{1}{2}b}{sin. \frac{1}{2}b} = Cot. \frac{1}{2}b, \frac{Cos. \frac{1}{2}c}{sin. \frac{1}{2}b} = Cot. \frac{1}{2}c;$$

$$\cot \frac{x}{a}\mu = \frac{\cot \frac{x}{a} \in \cot \frac{x}{a} \cdot b}{\sin A} + \cot A,$$

7) Hat man burch biefe Formel ben Binkel $\mu=A+B+C-180^\circ$ gefunden, so hat man anch ben Midden, inhalt des Dreveds = $\frac{\mu S}{720^\circ}$.

Bu f. Hieraus folgt, baß alle spharische Drevede, in wetschen der Winkel A und das Produkt Cot. ½b Cot. ½c gleich ift, benseiben Rlacheninhalt haben. Haben also zwen Drevede ABC, ADE, (Fig. 24) einen gemeinschaftlichen Winkel A, so ift ihr Flacheninhalt gleich, wenn Cot. ¾AB Cot. ¾AC = Cot. ¼AD Cot. ¼AE, oder, welches das Namliche ift, wenn Tang. ¼AB: Tang. ¼AD = Tang. ¼AE: Tang. ¼AG, d. h wenn die Langenten der halben Gesten, welche den Winkel einschließen, in umgekhrtem Bethaltuisse fieben. Es lassen

fic aus biefem Sage, einige merkmärdige Conftruttionen auf ber Lugelfliche ableiten, wie die jolgenden Aufgaben beigen werden.

\$ 67.

Aufg. We ift ein spharisches Dreved' gegeben; man soll ein anderes Dreved von gleichem Clacheninhalte find ben, worin ein Winkel so graft als m' jenem sey, und eine der deran lietenden Seiten eine gegebene Grofe habe.

Aufl. Es fen ABC (Fig. 24) bas gegebene Brened; A ber Bintet, weicher in bem gegebenen und in dem gefuchten Drenede von gleicher Groffe fenn foll.

Man verlangere, wenn es nothig ift, ben Bogen AB, und mache AD ber gegebenen Seite gleich; bestimme hierauf den Bogen AE durch die Proportion,

Tang. JAB: Tang. JAD = Tang. JAE: Tang. JAC: perbinde die Buntte D, F, durch ben Bogen DE, fo ift ADE das gesuchte Prepect (§ 66 Bus.)

6 68.

Infg. Co ift ein spharisches Dreyed gegeben: man foll ein anderes Preyed von gleichem flacheninhalte fin ben, welches eine gegebene Beite und einen gegebenen Wintel babe.

Aufle Es fen ABC (Fig. 25) das gegebene Prened.

.: Man verlängere eine seiner Seiten, etwa AB, bis AD ber gegebenen Seite des gesuchten Orenecks gleich wird; mas de sen Binkel ADG dem gegebenen Winkel, und (§ 67) das Breneck ADE dem gegebenen Preneck ABC gleich; verlänger te die Bogen AC, DG, bis ste in F zusammen stoßen, und mas de 'as Oreneck AGF = DEF, so wird ADG das gesuchte Oreneck senn. Denn es hat die gegebene Seite und den ger

gebenen, Minkel: auch ift & ADG - CADF - AGF - ADE - ABC, wie verlange wurde.

§ 6g.

Aufg. Gin gegebenes schänsches Dreveck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, bessen Scheitelwindel eis nem Winkel jenes Dnevecks gleich fer.

Aufl. Es fen ABC (Fig. 26) das gegebene Dremed, ADE das gesuchte, und AD = AE.

Die Proportion (§ 66 Juf.) Tang. JAB: Tang. JAD = Tang. JAE: Tang. JAC, verwandelt fich hier in Tang. JAB: Tang. JAD = Tang. JAD: Tang. JAC, Man barf also nur zweichen Tang. JAB und Tang. JAC die mittelere Proportionallinie suchen, so ift diese die Langente des halben Schentels As gesuchten Orepects.

S, 79.

Aufg. Ein spharisches Dreved burch einen Bogen aus einem feiner Winkel zu halbiren.

Buft. Es fen ADC (Fig. 26) das gegebene Drepedt, A ber Wintel, von mo aus daffelbe halbirt werden foll.

Man verwandele das Oreneck ABC in ein gleichschenklisges ADE (§ 69); halbire die Bass DE in F, und ziehe den Bogen AF; so ist ADF = \(\frac{1}{2} \in ADE = \(\frac{1}{2} \in ABC \). Mit der gegebenen Seite AB und dem gegebenen Binkel ABC, mache man nun das Oreneck ABG = ADF (§ 68), so wird der Bogen AG das Oreneck ABC halbiren.

5 71

Aufg. Imey Seiten eines spharischen Drevecke find gegeben, wie auch das Verhaltnis seiner glache zur gan-3en Bugelfläche: man soll das Dreveck bestimmen.

Muft. 1) Es fenen b, c, die gegebenen Seiten bes

Repects, 2: m das Berhalteris seiner Fläche zur Angelschie, und A + B + C - 180° = \mu: so ift (5 59 Jul.)

1: m = \mu: 1720°,

md daher In =

 $\frac{1}{2}\mu = \frac{560^{\circ}}{m}.$

2) Aus ber Gleichung (§ 66)

Cot. $\frac{x}{2}\mu = \frac{\text{Cot. c Cot. b}}{\sin A} + \text{Cot. A},$

thalt man, wenn $\frac{\cos \frac{1}{3}\mu}{\sin \frac{1}{3}\mu}$ für $\cot \frac{1}{3}\mu$, $\frac{\cos A}{\sin A}$ für $\cot A$ geset, und hierauf mit Sin. A Sin. $\frac{1}{3}\mu$ multiplicire wird, Sin. A $\cos \frac{1}{3}\mu$ — $\cos A$ Sin. $\frac{1}{3}\mu$ = $\cot A$ Cot. a Cot. b Sin. $\frac{1}{3}\mu$, oder Sin. $(A - \frac{1}{3}\mu)$ = $\cot A$ Cot. a Cot. b Sin. $\frac{1}{3}\mu$; we taus sid $A - \frac{1}{3}\mu$, und folglich auch A bestimmen läst.

3) Nachdem hierdurch A gefunden worden, ift es leicht, auch die übrigen Winket B, C, zu bestimmen. Denn es ist $B+C=\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}A+90^\circ$; dieser Werth, verbunden mit dem Werthe von B-C, welchen man aus § 32 XLVIII. ethált, giebt die Winkel B, C.

\$ 72.

Aufg. Die drey Seiten eines fpharifden Dreyecks find gegeben: man foll ben Sladenunhalt beffelben finden.

Auft. 1) Es läßt sich auch hier, wie in § 66, für den Ueberschuß $A+B+C-180^\circ$ eine Formel sinden, woben es micht nothig ist, die Winkel A, B, C, einzeln zu suchen. Zu dem Ende setze man $A+B+C-180^\circ$, $=\mu$; so ist C_0 , $\frac{\pi}{4}(A+B+C)=C_0$ s. $(90^\circ+\frac{\pi}{4}\mu)=-\sin\frac{\pi}{4}\mu$.

2) Es ist aber Cos. $\frac{1}{2}(A + B + C) = Cos. \frac{1}{2}A Cos. \frac{1}{2}(B + C)$ -Sin. $\frac{1}{2}A$ Sin. $\frac{1}{2}(B+C) = Cos. \frac{1}{2}A$ [Cos. $\frac{1}{2}B$ Cos. $\frac{1}{2}C$ -Sin. $\frac{1}{2}B$ Sin. $\frac{1}{2}C$]
- Sin. $\frac{1}{2}A$ [Sin. $\frac{1}{2}B$ Cos. $\frac{1}{2}C$ + Cos. $\frac{1}{2}B$ Sîn. $\frac{1}{2}C$] =

Con La Goigh B. Con. L. Com. Con. J. A. Sin. J. B. Sin. L. G.— Sin. 4 & Sin. 4 B Cus. 4 C.— Sin. 4 A. Cos. 4 B Sin. 4 C.

3) Hierin darf man nur fur Sin: & A, Sin. & B, Sin. & C, Cos. & A, Cos. & B, Cos. & C, ibre Berthe aus § 52, XXII. XXIII. XXV. XXVI. XXVIII. XXIX. tegen. Um die Recht nung leichter über sehen au tonnen, tege man,

$$\frac{1}{2}(a+b+c) = m$$
, $\frac{1}{2}(b+c-a) = n$, $\frac{1}{2}(a+b-c) = q$.

Mlebann mird,

$$\begin{array}{ll}
Sin. \frac{1}{2}A \Rightarrow V & \frac{Sin. p \, Sin. q}{Sin. b \, Sin. q}, & \text{Cos. } \frac{1}{2}A \Rightarrow V & \frac{Sin. m \, Sin. m}{Sin. b \, in \, o}, \\
Sin. \frac{1}{2}B \Rightarrow V & \frac{Sin. n \, Sin. q}{Sin. a \, Sin. c}, & \text{Cos. } \frac{1}{2}B \Rightarrow V & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. a \, Sin. c}, \\
Sin. n \, Sin. p & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, \\
Sin. n \, Sin. p & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, \\
Sin. n \, Sin. p & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. q}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin. m \, Sin. p}, & \frac{Sin. m \, Sin. p}{Sin.$$

3) Man bat demnach

Cos, & A Cos, & B Cos, & C Sin, m Sin, m Sin, n Sin, p Sin, q Sin, a Sin, b Sin, c

Sin, a Sin. b

Cos. $\frac{1}{4}$ A Sin, $\frac{1}{4}$ B Sin, $\frac{1}{4}$ C = Sin, $\frac{1}{4}$ Sin, $\frac{1}{4$

Sin. & A Sin. & B Cos. & C = Sin q V Sin. m Sin. n Sin. p Sin. q

Sin, & A Cos. & B Sin, & C = Sin, p V Sin, m Sin n Sin, p Sin, q Sin, a Sin, b Sin, c

und folglich Co. † (A + B + C) =

Sin, m - Sin, n - Sin, q - Sin, p

Sin, a Sin b Sin c

) 4) Diefer Ausbrud laft fic aber noch um ein Berracht liches abturgen, benn es ift, (F. 16), Sin, m - Sin, n =

 $2 \operatorname{Cox}_{\frac{1}{2}}(m+1) \operatorname{Sin}_{\frac{1}{2}}(m-1) = 2 \operatorname{Cos}_{\frac{1}{2}}(b+c) \operatorname{Sin}_{\frac{1}{2}}(a_{p})$ and (3. 15) Sin. $q+\operatorname{Sin}_{\frac{1}{2}}(p+1) \operatorname{Cox}_{\frac{1}{2}}(q-1)$ $2 \operatorname{Sin}_{\frac{1}{2}}(a_{p}) \operatorname{Cox}_{\frac{1}{2}}(a_{p})$ $2 \operatorname{Sin}_{\frac{1}{2}}(a_{p}) \operatorname{Cox}_{\frac{1}{2}}(a_{p})$

Sin. m — Sin. n — Sin. q — Sin. p = $2 \sin \frac{\pi}{4} = [\cos \frac{\pi}{4} (b + c) - \cos \frac{\pi}{4} (b - c)]$

eder, Sin, m — Sin, n — Sin, q — Sin, p = — 4 Sin, $\frac{1}{2}$ a Sin, $\frac{1}{2}$ b Sin, $\frac{1}{2}$ c (3. 18)

Ferner ift Sin. a Sin. b Sin. c ==

8 Sin. In Gon In Sin. Ib Cos. Ib Sin. Ic Cos. Ic. Berben biefe Beribe in dem Ausbracke bet Cos. I (A + B + C). substituter, sa erhalt man,

Cos. $\frac{1}{4}(A+B+C) = \frac{1}{-2} \frac{\text{Sin. m Sin. p Sin. q}}{-2 \cos \frac{1}{4} a \cos \frac{1}{4} b \cos \frac{1}{4} a}$

5) hieraus ergiebt fich nun ferner,

Sin. $\frac{1}{a} \mu = 1$

 $\frac{V\sin \frac{1}{2}(a+b+c)\sin \frac{1}{2}(b+c-a)\sin \frac{1}{2}(a+c-b)\sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}$

Hat man hierans $\frac{1}{3}$ in bestimmt, so ist der Flackeninhalt des Drenecks $=\frac{\frac{7}{3}$ is $\frac{3}{3}$ so $\frac{3}{3}$

Buf. Wenn b = c, so ift das Dreped gleichschenkelig, und man bat,

 $\sin_{\frac{1}{2}}\mu = \frac{\operatorname{Tang:} \frac{1}{2}a}{2\operatorname{Cos.} \frac{1}{4}b^2} \operatorname{V} \operatorname{Sin}_{*}(b + \frac{1}{2}a) \operatorname{Sin}_{*}(b - \frac{1}{2}a),$

Ift noch überdies b = a, oder ift das Drened gleichfeitig, fo bat man,

 $\sin \frac{\pi}{2} \mu = \frac{\text{Táng, } \frac{\pi}{2} \text{ a}}{\text{g Cos, } \frac{\pi}{2} \text{a}^2} \text{ V Sin, } \frac{\pi}{2} \text{ a Sin, } \frac{\pi}{2} \text{ a.}$

Dren auf einander perpenditulare Salbmeffer einer Lugel bilden einen forperlichen Wintel, welcher von bren ebenen rechten Winfeln eingeschloffen wird; man tann ibn einen tor, verlichen rechten Bintel nennen. Werden die Salbmefe fer verlangert, jo entfteben acht folde Bintel, moburd bie, Rugelfidde in eben fo viele rechtminkelige fpharifche Drenede getheilt mird, beren Seiten Quadranten find. Ein foldes Drened tann als bas Daaf bes rechten forperlichen Bintels angeleben werben, und gur Bergleichung beffetben mit ander ren, forperlichen Binteln bienen, in eben bem Sinne, in meldem ber Dugbrant als bas Raaf eines ebenen rechten Bin-Bels angesehen mird, und jum Mittel ber Bergleichung gwie ichen diefem und jedem anderen Bintel gebraucht wirb. Tebem torperlichen Bintel, beffen Spige fich in dem Mittelpuntte der Rugel befindet, er mag nun von dren oder mehr Alachenwinkeln eingeschloffen werben, entspricht auf ber Lugel. flache irgend ein fphariiches Dreped ober Bieled, burch befe fen Berbaltnif gum achten Theile der Rugelflache, das Bers balinif bes torperlichen Bintels au bem gur Einheit angenome menen rechten Bintel, gegeben ift. Das amifchen ben Rans ten eines torperlichen Bintels enthaltene Stud ber Rugeifide de bleibt aber von einerlen Große, fo lange die Summe ber Reigungswintel feiner Seitenflachen Diefelbe bleibt (6 60). es hangt bemnach die Große eines forperlichen Bintels bloß von diefer Summe ber Reigungswinkel ab, Die Angabl ber Ranten mag fepn, welche fie wolle.

v. Ginige Anwenbungen ber fpharifchen Trigono. metrie auf Feldmeffer Aufgaben.

\$.74.

Aufg. Drey in einer Zorizontalebene liegende Punkte werden aus einem über derfelben erbobeten Orte gesehen: man foll vermittelft einiger gemessenen, oder schon andersweitig bekannten Linien und Winkel, die Entfernung des Ortes, wie auch die seiner Projektion von jedem ber dery erwähnten Punkte, die gegenseitige Entsernung dies fer Punkte selbst, wie auch die Sohe des Ortes über der Horizontalebene finden:

Erfe Muflofung.

A, B, C, (Fig. 27) follen die dren in der Horizontalebes ne liegende, und D der erhöhete Bunkt jenn; fernet E die hos Tigontale Projektion dieses Punkteu.

Man meffe die Binkel CDA, BDA, CDB, unter wellden die dren Seiten des Drepeckes ABC aus D'gefeben werr' den; in der Sone meffe man die Binkel CAB, DAC, und' die Seite AB. Hieraus lassen fich mun die Entferhungen AC, BC, AD, BD, CD, die hohe DE, wie auch EA, EG, EB, und alle Winkel der Ppramide, deren Spize D'und Grundsfläche ABC ift, auf folgende Art finden.

2) Man bente fich in ben Gbonen ber bren Bintet CDA, BDA, CDB, aus D mit einem beliebigen Sattmeffer Da, bie dren Bogen ab, ac, be, beschrieben; so enstehet ein sphartische Streped aba: Eben so bente man fich aus dem Buntte A mit einem willtubrlichen Sathmeffer Ad in den Gbenen ber

bren' Binkel DAC. CAB, DAB, die bren Bogen do, ef, de, beschrieben: so geben auch diese ein spharisches Drened del.

- 2) Die bren Wintel BDA, CDA, CDB, find gegeben, folglich auch die Seiten ab, ac, bc, des spharischen Orens edes abc. Man kann bemnach ben Wintel bac finden (§ 34). Nun' ift bac = edf, weil bende ben Reigungswintel ber Ebenen. BDA, CDA meffen; folglich ift quch edf bekannt.
- 3) Man hat demnach in dem Brevede eld die benden Seiten de, ef, (wegen der gegebenen Wintel DAC, CAB) und ben Wintel edf; folglich auch die Seite df, d. h. den Wintel DAB.
- 4) In dem geradlinigen Orevecke ADB find demnach die Bintel DAB, BDA, wie auch die Seite AP bekannt; es lafe sen fich demnach die Seiten DA, DB, und der Bintel DBA finden.
- 5) Jest tennet man in dem Brencke DAC die Binket ADC, DAC, nebst der Seite DA; es lagt fich alfo and DC, AC, und ber Binkel DCA finden.
- 6) Aus den gefundenen Seiten DC, DB, und dem geger: benen Wintel CDB, Bonnen nun in dem Prepede CDB, auch die berden übrigen Bintet DCB, DBC, und die dritte Seite. BC gefunden werden; weithe Seite man auch aus AB, AC, und dem Wintel CAB berechnen konnte.
- 7) Aus dem fphavischen Drepede als findet, man ben Wintel ala, d. b. die Reigung der Sbene ADA gegen die horte zontalebene CAB; dieser Wintel ift dem Wintel DFE gleich, welcher gruftebet, wenn man DF auf AB perpendikular, und hierauf die Linie EF ziebet.
- B) Es ift aber DF = DB Sin. DBA; feiglich DE =::
 DF Sin. DFE; = DF Sin. dfe = DB Sin. DBA Sin. dfe;
 werens fiche die Höhe DB bestimmen lifet.

9) In diese Bobe gefunden, fo hat man in den ben E rechmeintetigen Dreneden DAE, DEB, DEC, pie Sypothemus fen DA, DB, D', und die ihnen allen gemeinschaftliche Caestee DE; folglich auch die anderen Catheten, EA, EB, EC.

Den but bemnach alles, was gefucht warbe.

Smente Mufichlung.

Bor mess (Sig. 28) die Bintet DAE, DAB, ADB, BDC, ADC. Ift nun noch die hobe ED betmut, fo-lassen, sich AB, AC, BC, AD, CD, BD, AE, CE, BE, unf folgende Art hestimmen.

- 1) In dem rechtwinkeligen Brenede DEA Mi gegeben? DE, DAB, also liche fich AD, nE, finden.
- 2) In dem Drenede ABD ift hekannt ABB, DAB, AD3, falglich Blan AB. And laft fich INF, finden, wenn diese Lie nie auf AB, fintecht gesogen wird.
- 3) In dem rechtivinkeligen Drengese DEF, ift alse bestammer DE, DF; es ichft fic also & DFE finden. Dieser Binkel ift das Supplement des Philippe e. jm. sphir. Orensede die 3u 180°; man kennet also auch diesen.
- 4) Im fohde Brenede abc, find die Geiten ab, ac, bc, gegeben; man findet abr ben Bintet a
- 5) Im spher. Drenecke del ift alfo e, d (= a), und de befaint, folgtich auch it, et, over bie Bintet DAC, BAC.
- Oh In Biebette DAC keinet man bemnach AD, ADG, DAC; affordied DC, AC.
- 7) Die Seite BC fann fowohl aus bem Brenede ABC, als aus bem Brenede CDB gefunden werben.
- 8) And DB, AD, PD, CB, findet man, wie in 9 der vor. Auft., AE, BE, CE.

: ".... Pritte Anflosung, :

Es sen gegeben (Sigi 28) DE, AC, DAC, ADB, ADC, BDC; es werde gesucht AB, BC, DB, DC, DA, EB, EC, EA. Man siehe DG auf AC perpenditular.

- 1) Im Dreifede DCA ist gegeden AC, ADC, DAG; man kann also DA, DC, DG, finden.
- 2) Im rechtwinfeligen Orenede DEG, ift DE, DG, be, fannt, also auch DGE = dfe.
- 3) Ine fphas Drepede abo, tenner man die dten Geiten ab, ac, bo; alfo auch ben Bintel bac == edf.
- 4) Ju fohde Drepede dle kennet man demnach die Bins tel d, f, und die Seite alf also auch de, of, oder die Binstel DAB; BACI
- 5) Im Drengett DBA fft bekannt, DA, DAB, ADB; Laffe laft fic DB, AB, fliden:
- BAC, ober aus dem Drenede BDC, und die Linien EA, EB.
 BC, wie in 9 ber ersten Auft.

Bierte Muftofung.

Et sep gegeben DE, BCA, DCB, DCE, ADB, ADC, BDC; es merbe gesucht, AB, BC, AC, DB, DC, DA, EB, EC, EA.

- 1) Man benke fich in den Sbenen der Binkel DCA, DCB, BCA; DCE, mit einem beliedigen Dalbmeffer die Bogen gh, hk, gk, hl beschrieben, wovon die drey enferen das sobier. Oreneck gal bilben, auf heffen Seite gk der Bogen all fenkerecht flebet.
- 2) Das rechtwinfelige Dueged DEC, worfn DB, DCE, befannt find, giebt DC, EC.

- 5) Im rechtwinkeligen fphan Wwenede alk, kennet man ak (= DCB), al (= DCE); also auch kl.
- 4) Im rechtw. sphar. Orenede hig tennet man bemnach gl (= gk kl); folglich auch bg m DCA.
- 5) Im Drepede DAG ift nun DG, DCA, ADC, bes fannt; man bat also auch DA, AC.
- 6) Das Orened DBC, wortn DCB, BDC, DC, befanns if, giebt DB, BC.
- 7) Aus dem Orepede ADB, ober ACB, findet man AB, und aus den rechtwinkeligen Orepeden DEA und DEB, EA und EB.

Zunfte Mufibfung.

Es seven gegeben die dren Seiten des Drepestes ABC, folglich auch seine Bintel, desgleichen die Bintel ADB, ADC, BDC, DAC; es werde gesucht: DB, DC, DA, DE, EB, EC, EA.

- 2) Im Orenecke DCA ift gegeben; AC, ADC, DAC; hieraus findet man DA, DC, DCA.
- 2) Aus dem fphat. Drepede abo, deffen bren Seiten ge geben find, laft fich ber Bintel ach berechnen, und diefer ift bem Bintel gale de.
- 3) Im sphar. Drenede ghk kennt man nun den Binkel h, und die Seiten hg (= DCA); und gk (= ACB); hier, aus last fic hk und das Perpendikel hl bestimmen, welches den Winkel DCE mist.
- 4) Im rechtw. Drevede DEC ift nun DC, DCE befannt: alfo laft fic auch DE, EC finden.
 - 5) Das Drened DCB giebt DB.
- 6) Aus DB, DE, findet man BB, desgleichen BA aus DA, DE.

Geofte Muflofungill

Ce sen gegeben AD, AB, AC, ADB, ADC, BDC; es werde gesucht BC, DC, DB, DE, EA, EC, EB.

- 1) Im Drenede ACD it gegeben AD, AC, ADC; man findet also DC, DAC, und DCA = gh.
- 2) Im Drevede ABD fennet man AD, AB, ADB; alfo and DB.
- 3) Im Drevede DBC ift nun DC, DB, BDC, befanne; also auch BC und DBC = hk.
- 4) Mus ben Seiten bes Drepedes ABC, findet man ACB = gk.
- 5) Aus ben breb Geiten bes ipharischen Drepedes gak, findet man bas Perpenditel hl = DCE.
- 5) 3m rechtw. Drenede DEC, ift' nun DC, DCE, ber tannt; man findet also DE, EC.
 - 7) Mus DE, DA, DB, finbet man EA, EB.

Stebente Muflefnich im mi-

Es werde gegeben AC, die aus D gemeffenen Winkel ADB, ADC, BDC, wie auch die Depressionswinket der Punkte: A, B, C, fur den Horizont senes Punktee, b. h. DAE, DCE, DBE; es werde gesucht DA, DC, DB, AB, BC, DE, EA, EB, EC.

1) Aus I 52 bes erften Cheiles diefer Samml erhalt man burch eine blofe Bertaufchung des Gefuchten mit dem Gegebernen, folgenden Ausbruck fur DE, DE ==

ÀC

V((Sec.ADE)² + (Sec.CDE)² - 2Sec.ADESec.CDE Cos.ADC] worant sich die Höhr DE bestimmen lisse, da die Wintel ADE = 90° - DAE, CDE = 90° - DCE besannt sind.

- DBE, ergeben fich in ben rechten. Dreneden I)EA, DEC, DEB, bie kinien EA, EB, EC, DA, DB, DC.
- 5) Im Orepede ADB kennet man nun die Seiten AD, DB, und ben Winfel ADB; besgleichen im Orepede CDB, die Seiten DC, DB, und ben Winfel CDB: man kann baber and AB, BC, finden.

Ben diefer Auflosung tann man alfo ber fpharifchen Erb gonometrie entbehren.

\$ 75

Anfg. Ans einem Orte werden drey Punkte gesehen, welche sich in verschiedenen Soben über der, durch diesen Ort gelegten, Sorizontalebene befinden: man soll vermie telft einiger gemessenen Linion und Winkel die Entfer, mungen dieser Punkte und ihrer Projektionen von jenem Orte, ihre gegenseitigen Antsernungen und ihre Saben über der Sorizontalebene finden.

A, B, C, (fig 29) mögen die bren Buntte fenn; D ber Ort, von wo uss fie gesehen werden; E. F, G, ihre respet, tiven Projettionen: man foll AD, BD, CD, ED, FD, GD, AB, BC, AC, AE, BF, CG, finden. Eines ober das andere bieser Stude tann auch gegeben senn, ober unmittelbar ger weesen werden.

· Erfe Muftofung.

3d will annehmen, die Hoben AE, CG, der Punfte AC, äber der Horizontalebene, wie auch der Binfel ACB walkern ich wie befannt; alsdam darf man nur ben D die Binfel ADB, ADC, BDC, ADE, CDG, BDF, meffen, um BF, AB, AC, BC, AD, BD, CD: ED, FD, GD, zu finden.

1) Die rechtwintefigen Prepede AED, CGD, geben, me

gen ber befannten Seiten AE, CG, und Bintet ADE, CDG, Die Seiten AD, ED, CD, GD.

- 2) Im Drenede CDA hat man also zwen Seiten AD, CD, und ben eingeschlossenen Winkel ADC; folglich auch AC, DAC, DCA (= fd).
- 5) Im spharischen Drensde abo kennet man, wegen ber gegebenen Winkel ADB, ADC, BDC, die Seiten ab, ac, bo: also auch den Winkel abo.
 - 4) Der Bintel abe ift aber nichts anders als der Bintel fde des spiderischen Drepedes dle. Man kennet also in dies fem Drepede, da auch ACB gegeben ift, die Seiten fd, fo, und den Bintel fde; folglich auch die Seite od, oder den Bintel BCD.
 - 5) Im Drenede BDC ift bemnach BCD, BDC, CD, bes tannt; man hat also auch CBD, BC, BD.
 - 6) Im rechtw. Drenede BFD ift BD gefunden, und BDF gegeben, folglich bat man auch BF, FD.
 - 7) Im Drepede ACB tennet man zwep Seiten AC, BC, und dem eingeschloffenen Bintel ACB; alfo auch AB.

3mente Auflofung.

Ich will nun annehmen, es waren die Winkel ADC, ADB, BDC, unter welchen die Seiten des Drepectes ABC aus D geschen werden, die Elevations, und Deprefficuswingel der Puntte A, B, D, für den Horizont des Punttes C, ACK, BCH, CDG, wie auch die Hobe CG und die Winkel ACD, BCD gegebent man sucht AE, BF, AB, AC, BC, AD, BD, CD, ED, FD, GD.

1) Im rechtwinfeligen Orenecke CDG tonnet man CG, EDG; also gud CD, GD.

- 2) Im Drenede BDC ift CD gefunden, und BCD, BDC gegeben; man hat also auch DB, BC.
 - 3) Eben fo findet man im Drenede ADC: DA, AC.
- 4) Im Orenede ADB find nun DA, DB, ADB, ber . fannt; folglich auch AB.
- 5) Im rechts Orenede BHC ift BC, BCH gegeben; ale so auch BH, und daber BF = BH + HF = BH + CG bekannt.
- 6) Sen fo tann im rechtw. Drenede AKC, aus AC, ACK, die Seite AK gefunden werden, und alsdann hat man auch AE = AK + KE = AK + CG.
- 7) In den rechtw Dreneden AED, BFD, find die Selsten AD, AE und BD, BF bekinnt; man hat also auch ED, FD.

\$ 76.

Aufg. Vier in einer Zorizontalebene liegende Punkte werden aus einem über dieser Ebene erhäheten Staudpunkte gesehen: man foll, vermittelst einer bekannten
Standlinie und einiger gemessenen Winkel, die Entfets
nung des Standes und seiner Projektion von jedem der
vier Punkte, dieser lenteren gegenseitige Entfernung, wie
auch die Sobe des Standes über der Zorizontalebene sinden.

Aufl. A, B, C, E, (Fig. 30) mögen die vier Punkte seyn, die aus dem erhöheten Orte D gesehen werden. Man messe die Binkel ADC, ADE, EDC, CDB, DAB, BAC, CAE, CBA, DBA, wie auch AB. Heraus täßt sich alsdann die Höhe DG des Standes über der Horizontalebene, wie auch DA, DB, DC, DE, GA, GB, GC, GE, AE, EC, BC, AC, auf folgende Art bestimmen.

- nebft ber Seite AB gegeben find, findet man DA, D.
- 2) Im spharischen Orenede abo kennet man die dren Seis ten ab, bo, ac, wegen der gegebenen Binkel ADB, ADC, CDB; man kann bemnach den Binkel abo finden.
- 3) Im sphar. Drepede def find bemnach, wegen ber gegebenen Bintel CBA, DBA, Die Seiten ig, dg, befannt; auch ift gdf = aba befannt; man hat also anch al, ober ben Bintel DBC.
- 4) Man bat bemnach in bem Orenede CDB Die Binfel CDB, DBC, und die Seite DB; folglich auch BC, DC.
- ,5) Im Prevede ABC find die Seiten AB, BC, nebft ben Winfeln ABC, BAC, bekannt; man kann also die Seite AC finden.
- 6) Das Drened ADC giebt, wegen der bekannten Seie ten AD, AC, DC, wozu noch der Winkel ADC kommt, den Winkel DAC, oder die Seite hm des sphar. Dreneds mal.
- 7) Aus den befannten Seiten bes fphar. Drepedes aoc, findet man ben Wintel cae = mhl.
- 8) Aus den nun bekannten Studen hm, ml, mhl, findet man im fphar. Drenede mhl die Seite hl = DAE.
- 9) Im Orenede ADE find nun die Binkel ADE, DAE, und die Seite DA bekannt, et last fic also auch AE, DB, berechnen.
- 10) Im Drepede ACE fuche man den Bintel AEC = pq, indem alle Seiten Dieses Drepedes und der Bintel CAE icon befannt find.
- 31) Aus ben brei Seiten des Drepedes DAE, nebft dem ebenfalls bekannten Mintel ADE, finder man AED = np, und aus den dren Seiten des Orepedes EDC, nebft dem Wintel EDC, erhalt man auch ng.

- 12) Im fphar. Drenede npq find bemnach alle Seiten bekannt; man hat also bas Perpendikel no = DEG.
- 13) Aus dem rechtm, Orevede DGE, worin DE und DEG befannt ift, ergiebt fich GE und die Sche DG.
- 14) Aus dieser Dobe und ben icon berechneten Linien DA, DB, DC, findet man endlich in den rechtm. Drepeden DGA, DGB, DGC, die Linien GA, GB, GC.

Unmert. Die Auflofungen der Aufgaben in § 74, 75, 76, find ben weitem nicht die einzig möglichen; vielmebr giebres ihrer in so großer Menge, daß man allenfalls ein ganzes Buch damit anfüllen könnte. Indeffen mögen biese wenigen binreichen, um den Nugen der sphörischen Erigonometrie in dergleichen Falien zu zeigen. Jeder, dem es darum zu ihnn ift, wird leicht von selbst nuch mehrere erfinden, und deburch ausleich eine gute Gelegenheit zur Hebung in der Rehanding sphärischer Drepeste erhalten.

§ ·77•

Aufg. Linen gegebenen, nicht horizontal liegenden Winkel, auf den Sorizont zu reductren, b. b. seine Prossertion auf die, durch feine Spine gelegte, Corizontalebene zu finden, wenn die Bevarions, oder Bepreffions, winkel seines Schenkel gegeben find.

Aufl. DEs fen BAG (Fig. 31 ber gegebene Binfel's DAE die horizoniale Projektion beffelben; ferner Am eine Bertifale; mp, mq, zwen Quadranten, welche die Linien AB, AC, in a und n ichneiben. Bende Schenfel merben bier über ben horizont angenommen.

2) Da außer BAC auch noch die Clevationeminkel BAD CAE gegeben find: so setze man BAC = a, BAD = \beta, CAE = \gamma. Die Bogen on, oq, np, find die Maase dieser

Winkel; man hat also on = a, eq = B, np = v, und bar her mo = 90° - B, mn = 90° - v....

- 3) In dem fpharifden Drepede mno find bemnach alle Seiten befannt; es laft fich also der Wintel pmq finden, und Dieser ift ber gesuchte Projettionswintel DAE.
- 4) Gest man namilich in 1. § 54, 2 = α, b = 90° β, c = 90° γ; fo erhalt man,

Cos. EAD
$$=$$
 $\frac{\text{Cos. } \alpha - \text{Sin. } \beta \text{ Sin. } \gamma}{\text{Cos. } \beta \text{ Cos. } \gamma}$

odet;

Sin. I EAD
$$= V \frac{\sin \frac{\pi}{4}(\alpha + \beta - \gamma) \sin \frac{\pi}{4}(\alpha + \gamma - \beta)}{\cos \beta \cos \gamma}$$

Buf. Liegt einer von ben benben Schenkein, etwa AC, unterhalb der Horizontalebene, so verwandelt fic der Clevar tionswinket deffelben in einen Depressionswinkel, und man muß baher ift den vorigen Formein — p anstatt p sepen; hiernach erhalt man,

Cos. EAD =
$$\frac{\text{Cos. } \alpha + \text{Sin. } \beta \text{ Sin. } \gamma}{\text{Cos. } \beta \text{ Cos. } \gamma}$$

Sin.
$$\frac{1}{2}$$
EAD = $\sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \gamma - \beta)}{\cos \beta \cdot G_{\rho \beta} \cdot \gamma_{\beta \beta}}}$

Liegen bingegen bevotz Scheukel unter der Horizontalebene, so muß man — B anftatt B, und — v auftatt; v fepent; hierdurch leiden aber die Formeln der in 4 Aufl. Leine Aenderung, wie auch leicht voraus zu seben war.

VI. Fundamentalfäße aus her Lehre von ben edigen Rorpun, jum Behufe bes Folgenben.

... . 🐒 78.

Die Rorper tounen, geometrisch betrachtet, unter zwen hamptklassen gebracht werden; benn sie werden entweder 1) von lauter ebenen Flachen eingeschlossen, oder 2) von ebenen und frummen Flachen zugleich, oder auch frummen allein. Die zwente Klasse gehöret nur zum Sheil in die Elementars Geometrie; die erfte ganz.

Bur Kenntnis eines von lauter ebenen Alden eingeschlofenen Körpers gelanget man: 1) durch die Granzstächen befseiben, d. h. diesenigen Alden, welche den Körper von allen Seiten einschließen, sowohl in hinficht auf ihre Figur, als auf ihre Größe; 2) durch die Kanten, d. h. diesenigen geras den Linien, in welchen sich jede zwen an einander flossende Granzstächen schneiben; 3) durch die körperlichen Winkel, d. h. diesenigen Winkel, welche von dren, oder mehreren Flachen in den Punkten, wo sie zusammen stofen, gebildet werden.

Die Bestimmung einer ebenen geradlinigen Figur erfore bert nur Stude zwenerlen Art, namlich: 1) die geraden Linien, welche ihren Umfang bilden; 2) die Bintel, welche diese Lisnien einschließen.

Bum Beispiel nehme ich den feilfomigen Korper ABCDEF (Fig. 32). hier tommen überhaupt zwanzig Stürche in Betrachtung, welche alle, oder bloß zum Theis zur Bee. stimmung des Körpers dienen tonnen; namlich: 1) Sechs torpertiche Wintel, A, B, C, D, E, F; 2) Neun Lauten, AB, BC, CD, DA, AE, DE, BF, CF, EF; 3) Kunf Granzschuchen, ABCD, ABFE, ADE, CDEF, BCF.

79.

Der Unterfdieb in ben formen ber Rorpen bange nicht blog von ber Angabl ihrer Grangfidden, fonbern auch von ber Angabl ihrer Eden und Ranten ab. 3ft Die Angabl einer jeden Art Diefer Bestimmungsftude ben awen Rorpern Diefels be, fo find biefe Rorper, geometrifd betrachtet, gleichartig. Es wird aber bald gezeigt werben, bag bie Angahl ber Ranten von ber Angabl ber Grangfidden und ber Angabl ber Eden abhange; man tann alfo bie Angabl ber Ranten ben Diefer Eintheilung ganglich außer Acht laffen, und fic blof auf die Anzabl ber Grangflachen und ber Eden einschranten. tann alebann die gebrauchliche einseitige Benemung ber ver-Schiedenen Arten von Rorpern, melde blog von ber Angabl ber Blidden bergenommen ift, ale Betrgeber, Bentaeber, Der raeder, n. f. m. baburd berichtigen, bag man noch bie Mnacht ber Eden himaufuget. Es murbe alfo s. B. ber vorige teilformige Rorper ein fechsediges Bentgeber, und Die brenfeith ge Byramide ein vierediges Cetraeber genannt werben muffen. Ben ben regularen Korpern ift smar biefe Bingufugung ber Edenzahl nicht nothig, weil ben biefen, wie in ber Rolge gezeigt werden wird, die Angahl ber Eden aus ber Angabl ber Brangflachen bestimmt mirb, ben ben irregularen Rorpern bine gegen ift es allerdings notbig bierauf Rudficht gu nebmen.

\$ 80.

Die nabere Bestimmung ber Korper tann füglich von ber Angabi ber Geiten, von benen jebe einzelne Grangstäche einz geschiosien wird, und deren nicht weniger als bren sein können, bergenommen werden. Rennet man aber die Angabi der Granzssichen eines Körpers, und die Angabi der Seiten, also auch die Angabi der ebenen Wintel einer jeden derselben; so kennet man auch die Angabi der, auf der Oberstäche des Korpers

- parhandenen gebenen Winfel, wie auch bie Summe aller biei fer Binfel; benn aus ber Anzahl ber Griten einer jeden Grang fläche latt fich die Summe aller Binfel in beriefben, folglich auch die Guinme der Bintel in allen Settenflächen zujamt men genommen, berechnen.

Sier folgen nun einige leichte Lebridge in Sinfict auf folde Sigenicaften, welche allen, von ebenen Riden einger schloffenen Körperu, gomein find; fie find die Grundlage ber ganzen Körperlehre, und ohne fie werde biefer Cheil ber Gewwetrie boch unvollständig fenn.

€ 81.

Lebrfag. In jedem Körper ift die Angahl der Kanten immer halb fo groß, ale die Angahl der ebenen Wift Tel auf der Oberfläche deffelben.

Bem. Da jede Kante durch zwen Seiten der an einam ber grängenden Flächen gebilder wird; so ift die Anzahl der Kansen in jedem Körper halb is groß, als die Anzahl der Seiten in allen Gränzstächen zusammen genommen. Die Anzahl der Seiten ift aber der Anzahl der ebenen Winfel gleich; folglich ift auch die Anzahl der Kansen halb so groß, als die Anzahl der ebenen Winfel.

Erker Suf. Da die Angabl ber Kanten nothwendig burch eine gange Babl ausgedruckt febn muß, fo muffen bie ebenen Wintel, welche fich auf der Oberfidche eines Korpers befinden, immer in gerader Angabl vorhanden fenn, weil ihre Angabl durch a dividirt, die Angabl ber Kanten giebe.

3 went. Buf. Wenn bemnach ein Körper von lauter Dreneden begrängt wird, fo mut bie Angabl ber Gräuffich den immer gerade fenn; benn mare fie ungerade, fo ware auch die Angabl ber ebenen Binfel ungerade. Das Ramliche gilt aberhaupt, wenn die Erauffachen fanter Bielede pon

einer ungeraden Angahl ber Geiten find; alfo Funfede, Sies benede, Reunede, u. f. m.

Oritt Jus. Wenn ein Körper von folden Bieleden begranzt wird, welche zum Cheil eine gerade, jum Sheil eine ungerade Anzahl der Seiten baben; so sen die Anzahl der Bielede van der erken, n die Anzahl der Bielede von der zwenten Art; fotglich m + n die Anzahl der Granzstächen. Albbann muß n nordwendig eine gerade Zahl senn, m mag gerade oder ungerade senn.

Biert., 3uf: Bestehet bemnach die Oberstäche eines Körpers aus a Drepeden, b Biereden, c Kunfeden, d Sechseden, c Sievencken, u. s. w.; so muß a + c + e + 1c., als die Anzahl aller ungeraden Bielede, eine gerade Jahl sepn. Bur einen solchen Körper ift die Anzahl der Granzstächen wa a + b + c + d + e + 1c., die Anzahl aller ebenen Winztel, ober aller Seiten = 3a + 4b + 5c + 6d + 7c + 1c. und daher die Anzahl aller Kanten = \$\frac{1}{2}(3a + 4b + 5c + 6d + 1c.).

Lehrs. Die Anzahl der einen Winkel auf der Gber, fläche eines Körpers ist entweder dreymal so groß, oder größer, als die Anzahl der Gränzstächen, oder, welches das Rämtiche ist, die Auzahl der ebenen Winkel kann nie geringer senn, als das Dreysache der Anzahl der Gränzsstächen.

Bew. Die Grangfichen eines Körpers find entweber Orenede, oder Jiguren von mehr als dren Seiten. Im erftey Falle ift die Anzahl aller Seiten, oder aller ebenen Winkel brenmal so groß, im zwenten Falle größer als die Anzahl der Grangfichen.

Bus. Es sen die Anzahl ber Grangfidchen auf der Obers Miche eines Körpers = F, die Anzahl der Kanton = K, und

daber die Angahl der ehemen Winkel = 2 K; alsdann ift, nach dem gegenwärtigen Sape, entweder 2 K = 3 F, ober 2 K > 3 F, aber nie 2 K < 3 F. Sa giebe daher keinen Körzper, worin K < ½ F, ober f > 2 K.

§ 83

Lehrs. Die Anzahl aller, auf der Oberfläche eines Borpers vorhandenen ebenen Winkel, ist entweder so groß, oder größer, als die Anzahl der Roben diffilben dreymal genommen; oder, welches das Ramliche ist, die Anzahl der ebenen Winkel kann nie geringer seyn, als die Anzahl der Ecken dreymal genommen.

Bew. Jede Ede wird entweder von drey, oder von mehr als drey ebenen Binkeln gebildets denn kein körperlicher Binkel kann von weniger ats drey ebenen Binkeln eingerschloffen fenn. Im ersten Falle ift die Anzahl der ebenen Bink kel dreymal so groß, im letteren mehr als dreymal so groß, als die Anzahl der Eden.

Jus. Es sen die Anjahl der Eden = E, die Anjahl der Kanten = K, und folglich die Anjahl der ebenen Winket = 2K: so ift immer, entweder 2K = 3E, oder 2K > 3E, aber nie 2K < 3E, oder K < 2E; also auch nie E > 2K. Wenn daher F die Anjahl der Granzschen bezeichnet, so kann weder F noch E größer als ?K sepn (§ 82 Jus.).

- 5 84.

Lebrs. für jeden Aorper ift die Summe der Angahl der Eden und der Brangflachen um 2 größer, ale die Angahl der Banten.

Bew. 1) Mun nehme finerhalb bes Korpers irgend einen Puntt an, bente fich um biefem Puntte eine Augelflache besichrieben, und ans bemfelben nach allen Eden bes Lorpets. Lie nien gezogen, welche bit Augelflache in eben fo viele Puntte

treffen. Werben biefe Bantte burch Gogen größter Preife so verbunden, daß jeder Kanne des Körpers ein Bogen auf der Rugelfidche zugebatt, so wird badutch die Rugelfidche in laufter spharische Bielede geiheilt, beren sebes einem von den Wielecken, welche die Brunglidchen des Körpers bilden, loes respondirt.

2) Es bezeichne num s, s', s'', u. f. w. die respektive Gumme ber Winkel in jedem dieser spharischen Dielede; n, n', n'', u. f w. die Anzahl der Seiten. Aus 3 60 erhalt man alsbann für die Klachen dieser Bielede folgende Ausbruder

$$\frac{8 - (n-2) 180^{6} 8}{720^{6}}$$

$$\frac{8' - (n'-2) 180^{6}}{720^{6}}$$

$$\frac{8'' - (n''-2) 180^{6}}{720^{6}}$$

$$\frac{8'' - (n''-2) 180^{6}}{720^{6}}$$

Alle diefe Bielede pufammen machen die gange Angelftache aus; man bat alfo

$$\frac{s+s'+s''+ic.-(n+n'+n''+ic.-2F)180^{6}}{720^{6}}8=8$$

worin F die Angahl der Grangflächen des Körpers, und alfo auch die Angahl der spharischen Bielede bezeichnet. hieraus erhalt man,

$$s + s' + s'' + ic. - (n + n' + n'')c. - bf) 1800 = 7200.$$

5) Das Net, welches diefe Blelede auf der Augelstäche bilden, hat gerade so viele Bintelpuntes, als der Abeper Eden hat; um jedem dieser Wintelpuntes liegt eine gewise Angahl sphärischer Wintel, deren Summe = 360°; folgtich ift die Summe aller sphärischen Wintel, voer a + a' + u'' + 15.

= 560° . E. Die Anzahl aller Seiten auf der Oberfläche des Körpers ift n + n' + n'' + ic., und diese ift doppelt so groß als die Anzahl der Lamen; man hat also n + n' + n'' + ic.= 2K.

4) Subflituirt man dieft Werthe in der in 2 gefundenen Gleichung, fo erhalt man

ober

E+F=K+a

88. 3. E. Si.

\$ 86.

Lebrs. In jedem Borper ift die Anzahl der Banten um soche vermehrt, kleiner oder eben so groß als die Anzahl der Ecken oder ber Grangflächen dreymal genommen.

Bew. Rach § 83 Bus. ift für jeden Korper 2K 3E, 2K 3E. Aus § 84 erhalt man aber F = K - E + 2 B = K - F + 2. Die Substitution diefer Werthe giebt

Vorque man erhalt,

Erfl. Bus. Hieraus erhellet, bag es teinen Körper giebt, in welchem bie Angahl ber Kanten um 6 vermehre größer ware, als die Angahl der Eden voer ber Flächen bronmal gennommen.

Bwent. Bul. In sedem Abeiber ist daher einweder K+6=5F, oder K+6<5Fy und feben fo entweder K+6=3E, oder K+6<5E. Wenn also a, B, y, v, alle mögliche positive Bahlen, die Nall mit eingeschlossen, bei deuten können; so hat man K+6+5=5F, K+6+2=3E; ferner aus § 82 und 83, K=4F,4 y, und K=4K+3. Südituire man diese lesteren Werthe in den begden ersten

Sleichungen, to erhalt man, $\frac{1}{2}F + 6 + \alpha + \gamma = gF$, $\frac{1}{2}E + 6 + \beta + \delta = gE$, oder $4 + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = F$, $4 + \frac{2}{3}(3 + 6) = B$. Hierans erhellet, das sowohl die Anjahl der Eden, als die Anjahl der Flächen, nicht kleiner als 4 senn kann.

Oritt. 3 d'i. Sest man die, so eben gefundenen Werthe von E und F, in die Gleichung E+F=K+2 (§ 84), so erhält man, 6+4 ($\alpha+\beta+\gamma+\delta$) = K; woraus erhels let, daß die Anzahl der Kanten nie kleiner als 6 senn kann. Die drenseitige Hyramide ist daher der einfachste Körper, weil darin E und F = 4, und K=6.

\$ 86.

Lehrs. In jedem Körper ist die Anzahl ber Grans, flächen um vier vermehrt, entweder kleiner, oder eben so groß, als die doppelte Anzahl der Ecken, und die Anzahl der Ecken um vier vermehrt, entweder kleiner, oder eben so groß, als die doppelte Anzahl der Gränzstächen.

Bew. Nach § 85 if K = $\frac{1}{4}$ F + γ , K = $\frac{1}{4}$ E + δ . Da nun K = E + F - 2 (§ 84), so hat man $\frac{1}{4}$ F + γ = B + F - 2, $\frac{1}{4}$ E + δ = E + F - 2, and hieraus F + 4 + 2 γ = 2E, E + 4 + 2 δ = 2F; deher F + 4 < 2E, E + 4 < 2F, ober duch, wenn γ und δ = 9 geseht werden, F + 4 = 2E, E + 4 = 2F.

Erft. Jus. Es tann daber teinen Körper geben, in welschem die Angahl ber Grängsichen um vier vermehrt, größer als die doppelte Angahl der Eden, oder die Angahl der Eden um vier vermehrt, größer als die doppelts Angahl der Grängssichen wäre.

3went. Buf. Da E= FF+2+2, E=2F-4-26; fo tam die Angahl der Eden weder tleiner als FF+2, nech

größer als EF - 4 fenn Die Angahl ber Eden fallt bemnad immer gwischen ben benben Grangen 2F - 4 und FF + 2.

Dritt. Buf. Eben fo, da Fr= 2E-4-29, F= &E+2+6, fo kann die Angahl ber Grangflachen per Ber großer als 2E-4, noch kleiner als &E+2 fonn. Die Angahl der Grangflachen fallt also immer zwischen den benden Grangen 2E-4 und &E+2

\$ 87.

Le brf. Rein Korper kann von lauter folchen Sigus ton eingeschlossen werben, welche seche oder mehr Seiten haben; auch giebt es keinen Korper, bessen Beien von seche oder niehr ebenen Winkeln gebildet wurden.

Bem. 1) Wenn ber Korper von sechs, ober mehrseitigen Figuren eingeschlossen wird, so ift die Angahl der ebenen Winskel auf det Oberfidche desselben, entweder = 6 F, ober > 6 F, und folglich K = 3 F, ober > 3 F. Nun ift aber K = 3 F = 6 $= \alpha$ (§ 85 3 went. Su f.), mithin K < 3 F; and dieses widerspricht dem Borigen.

2) Bedren die Eden aus 6, obet mehr ebenen Winteln gusammen gesetht; so mare die Angabl aller ebenen Bintel auf ber Oberfidche bes Korpers, entwedet = 6E, ober > 6E; folglich K = 3E, ober > 3E. Es ift aber K = 3E - 6 - 3, (§ 85 ament: 3us.), mithin K < 3E, welches dem Borisgen widerspricht.

\$ 88.

Lebrs. Die Summe aller ebenien Wintel auf ber Oberfläche eines Borpers beträgt gerade viermat so viel rechte Wintel', als der Unterschied zwisthen ber Jahl der Kanten und ber Jahl der Granzstächen Einheiten euthäfte.

Bew. Die Oberfläche bes Körpers bestehe aus a Breiteifen, b Biereifen, o Finfecken, d Sechsesten, . Giebeneabin' /
Geometrie II.

is son; alsdann ift F = a + b + c + d + e + 1c., $K = \frac{1}{2}(5a + 4b + 5c + 6d + 7e + 1c.)$, weil die Angahlaller ebenen Wintel = 3a + 4b + 5c. + 6d + 7e + 16. Da nun die Summe aller Wintel eines Drepects = 2a, eines Vierects = 4a, eines Fünsects = 6a, eines Sechsects = 8a, eines Siebenects = 10a, u. son, so ist die Summe aller ebenen Wintel = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + 16c rechten Winteln. Es ist aber 4k = 6a + 8b + 10c + 12d + 14e + 16c. 4k = 4a + 4b + 4c + 4d + 4e + 1c.; daher 4k = 4a winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e + 10c, rechten Winteln = 4a + 4b + 6c + 8d + 10e

3u.f. Da 2 K = 3 F + 2 p (§ 85), so ift 4 K = 4 F = 2 F + 4 p. Die Summe aller ebenen Winkel kann daher nie kleiner als 2 F rechte Winkel senn. Da fetner K = 3 F - 6 = a (§, 85), so ist auch 4 K - 4 F = 8 F - 24 - 4 a. Die Summe aller ebenen Winkel kann daher nie größer als 8 F - 24 rechte Winkel werden. Die Summe aller ebenen Winkel in Rechten ausgedruckt, kann daher nie anger den Grangen 2 F und 8 F - 24 sallen

\$.89.

Lebrfag. Die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche eines Körpers heträgt gerade so viele rechte Winkel, als die um acht verminderte viersache Eckenzahl Einheiten enthält.

Sen. Die Summe aller ebenen Wintel ift = 4K - 4Frechten Wintelder Da man F + E = K + 2, so ift K - F= E - 3, und daher 4K = 4E - 8.

Anmert . Diefen Sat, burd welchen man unmittelbar am ber Angehl ber Eden eines Körpers bie Summe ber eben winglicht, auf, ber Querfliche beffelben bestimmen tann, ift um fo merkvorbiger, ba es einen chulichen Sat fur die ebet.

nen Figuren in hinficht auf das Berhaltniß zwischen ber Ans zahl und ber Gumme ihrer Winfel giete. Bedeutet namtich m die Anzahl der Seiten oder Winfel einer Figur, so ift, wie bekannt, die Gumme aller Winfel = 2 n - 4 rechten Winfeln.

\$ 90.

Lebri. Borper, welche von lauter Dreyeden einger fchloffen, und beren Eden nur von filns, ober von feche ebenen Winkeln gebilder werden, können nicht mehr und nicht weniger als zwolf Eden von der erften Urt haben.

Bem. i) Rach § 85 ift K = i F + y, und nach § 86 F + 4 + 2y = 2E. Da der Körper von lauter Oreneden eingesichloffen wird, so ift (§ 82) y = 0; also K = i F, E = i F + 4.

- 2) Es fen nun p die Anzahl der Eden, welche fanf, und q die Anzahl der Eden, welche feche Flachenwinkel haben; so ift E=p+q, und $K=\frac{1}{2}(5p+6q)$. Aus diesen ben Gleichungen findet man p=6E-a K.
- 3) Sest man in diefen Ausbrud bes p für K und E ihre Werthe aus 1, fo erhalt man p = 12.

Bus. List man q unbestimmt, so ergeben sich für E, F, K, folgende Berthe: E = 12 + q, F = 20 + 2 q. K = 30 + 8 q.

Die Erfindung det hier vorgetragenen Cape aus ber Lebre von den edigen Rorpern baben wir größtentheils bem ber unbunian Gular ju verdanten; fie finden fich in den folgenden benden Abhandlungen:

- 1) Elementa dectrinae solidorum. Novi Commentarii acad. scient. Petrop. Tom. IV. ad an. 1752-53. p. 109.
- 2) Demonstratio nonnullarum infigatiam proprietatum, quibus Solida hedris planis inclusa funt praedita. Como, p. 14a.

VII. Aufgaben für Parallelepipeben, Prifmen, Ppp ramiben, und einige andere einfache Abrper.

5 91.

Aufg. Die bred Aanien eines Parallelepirebs, well che an einer Ede besselben zusammen fiofien, find geget ben, wie auch die Winkel, welche diese Linien nit etnans der einschließen: man soll die Oberfläche und den kubischen Inhalt des Abrects finden.

Nufl. Es sen ABCDEFGH. (fig. 33) bas Parallelepts pet; AB = a, AD = b; AH = c bie gegebenen Getten; BAD = a, BAH = \beta, HAD = \gamma, die gegebenen Winkel.

1) Es ift die Seitenstäche ABCD = ab Sin. \alpha, die Seitenstäche ABGH = ac Sin. \beta, die Seitenstäche ADEH = bo Sin. \gamma. Da nun sede dieser flächen der ihr gegenüber lies genden gleich ift, so ift die gange Oberstäche =

2 (ab Sin. & + ac Sin. 6 + bc Sin. 7).

2) Es fen HR auf der Grundflache perpendifular, bad ein fphartiches Drepect, deffen drep Seiten die, den gegeber nen Binteln zugehörigen Bogen find, hu ein Perpendifel auf BD, Aus f 41 hat man aledaun Sin hr

Sin. HAR
$$=\frac{2}{\sin \alpha} V \begin{bmatrix} \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin \frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) \times \frac{1}{2} \\ \sin \frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) \end{bmatrix}$$
Mun ist die Höhe HR $=$ c Sin, HAR, und die Grundsides

ABCD = ab Sin. a; folglich ift der Inhalt des Korpers szt.

2 abe
$$V$$

$$\begin{bmatrix} Sin, \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)Sin, \frac{1}{2}(\beta + \gamma + \alpha) \\ Sin, \frac{1}{2}(\alpha + \gamma + \beta)Sin, \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \end{bmatrix}$$

Anfg. Unter den nämlichen Voraussenungen als im vorigen &, die Reigungswinkel der Granzflächen des Pas rallelepipede zu finden.

Aufl. Die Neigung ber Sebenen ABGH, ABCD; ift burch ben spharischen Bintel hbd, die ber Sbenen ADEH, ABCD, burch den Wintel bah, und bie ber Benen ABGH, ADEH, burch den Bintel bad gegeben. Es ift aber

Sin. I hod
$$= V \frac{\sin \xi (\beta + \gamma - \alpha) \sin \xi (\alpha + \gamma - \beta)}{\sin \alpha}$$

Sin.
$$\frac{1}{2}$$
bdh = $\frac{\sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)}{\sin \alpha \sin \gamma}$

Sin. 4 bhd
$$= \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta)\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)}{\sin \beta}}$$
;

woraus fic die dren Bintel bbd, bdh, bhd, und fomit bie gefuchten Reigungewintel bestimmen laffen.

\$ 93.

Aufg. Unter ben namlichen Voranssenungen, wie in § 92, die Sigur und ben glacheninhalt eines Diagonalischnittes zu bostimmen.

Aufl. 2) Es fey ACFH (Fig. 34) ber zu berechnende Diagonalschnitt; bird ein sphar. Drepect, wie das in Fig. 33, and its ein Bogen aus ber Spipe in nach bem Durchschnittse huntte ber Dingonale MG-und bes Bogens bd.

2) Alebann ift im fpbarifden Drepede bah.

Cos. d =
$$\frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma}$$

ynd im sphår. Dreneste odd,

Cos, 'c = Cos y Gos. dc + Sin. y Sin. de Cos. d. Substituirt man in der awenten Gleichung for Cos. d feinen Berth aus ber erften, fo erhalt man,

Cos.
$$h = \cos \gamma$$
 Cos. $dc + \frac{(\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma) \sin \alpha dc}{\sin \alpha}$

5) Aus dem geradlinigen Drepede ACD, morin DC = a, DA = b, ADC = 1800 - a, findet man,

$$AC = V(a^2 + b^2 + 2 \text{ ab Cos. } \alpha);$$

bierans ferner vermittelft der Proportion AG : DC = Sin. ADC : Sin. DAC . Sin. de),

Sin. de =
$$\frac{a \sin \alpha}{\sqrt{(g^2 + b^2 + ab \cos \alpha)}}$$

and bemnad, and gin

4

Cos, de =
$$\frac{b + a \cos \alpha}{V(\hat{a}^{\hat{a}} + b^{\hat{a}} + 2ab \cos \alpha)}$$

4) Die Substitution diefer Werthe von Sin, dc, Cos. de, in ber in a gefundenen Gleichung giebt,

Cos. hc = Cos, HAC =
$$\frac{a \cos \beta + b \cos \gamma}{V(a^2 + b^2 + aab \cos \alpha)}$$

5) Sieraus erhalt man ferner, Sin. HAC =

$$V[a^2 \sin \beta^2 + b^2 \sin \beta^2 + 2ab(\cos \alpha - \cos \beta \cos \beta)]$$

 $V(a^2 + b^2 + 2ab(\cos \alpha)$

Der Flacheninhalt bes Parglielogramme ACFH ift aber mit HA . AC , Sin. HAC; man hat Demnach folgenden Ausbrud Dafür:

· & V [a2 6in, β2 + b2 Sin, γ2 + 2 ab (Cos, α - Cos, β Cos. γ)].

6) Aus 3 hat man die Linie AC; aus 4 ben Bintel HAC; und aus 5 ben Flacheninhalt" bes Parallelogramme ACFH; mithin alles, was gesucht wurde.

Buf. Um diese Stade in bem Diagonalschnitte, welcher burch die Kangen BG, DE gebet, an bestimmen, barf man

sur die Ede A mit der Ede D vertauschen, und also in den gefundenen Ausdrücken 1800 — a für a, und 1800 — p für p segen, wodurch sich Cos. a in — Cos. a, und Cos. y in — Cos. p verwandelt.

5 94

Aufg, Unter ben Porausstrumgen bes S 91 die Dias gonalinie des Parallelepipedes, und die Rating des Dias gonalichnictes gegen die Grundstäche zu finden.

Aufl. 19 Man bente fic die Diagonalen HC, AF, ger zogen. Die Orepede HAC, ACF, geben alsbann, weil Cos. ACF = - 'Cos. HAC.

HC? = AH2 + AC2 - 2AH, AC. Cos. HAC, \overrightarrow{AF} ? = CF2 + AC4 + 2CF, AC. Cos. HAC.

Sest man hierin fur AC und Cos. HAC ihre, im vorigen I ger fundenen Berthe, und AH' = CF = c, fo erhalt man fur die berben Diagonaten AF, HC folgende Anverace:

 $AF = V(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \alpha + 2ac \cos \beta + abc \cos \gamma)$ $HC = V(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \alpha + 2ac \cos \beta + abc \cos \gamma)$

2) Die Neigung ber Sbenen ACFH, ABCD, ift burch ben fpharifchen Wintet had gegeben, es tommt alfo blog bar, auf an, Diefen gu bestimmen.

Das fobdr. Drened hdo giebt,

Cos. hcd = $\frac{\text{Cos. hd} - \text{Cos. hc Cos. dc}}{\text{Sin. hc Sin. dc}}$

Run ift Cos. hd = Cvs. p; Cos. he und Cos. de, beegleischen Sin. ho und Sin. do find im porigen \$ icon gefunden worden; man hat alfo, wenn biefe Substitutionen gemacht werden, nach ber geterigen Reduftion

Cos. hed 😅

a Cos. $\beta = b$ Cos. $\beta = Cos$, α (a Cos, $\beta = b$ Cos. γ) §in, $\alpha \bigvee [a^2 \sin \beta^2 + b^2 \sin \gamma^2 + 2ab (Cos, \alpha - Cos, \beta Cos, \gamma)]$

Ein Momboeber ift ein Barallelepipeb, welches burch feche gleiche und abnliche Rhomben begrangt wird. 3wen non ben einander gegenüber liegenden torperliden Binteln, wie A. F, (Fig. 54) werden von drep gleichen ebenen Binteln, fpige ober- flumpfe, eingeschloffen. Jeber pon ben feche anberen wird burch einen ebenen Wintel, ber bem borigen gleich, und durch zwen gibere, welche bie Complemente jener zw 1800 find, begrangt. Diefe Art von Parallelepipoden verdient bes halh besonders bemertt zu werden, weil, fie nach Saus, einem Der berühmteften Mineralogen unfever Zeit, Die primitive Form oder Reingeftalt Des tobleugefduerten Ralte ift, (m. f. Sann's Lebrbuch ber Mineralogie, überfest von Rarften. Paris und Leipzig 1804) , que melder alle Barietaten biefes Foffils burd Aufichichtung fleiner, ber Rerngeftalt abnlicher Partitelden. welche herr Daun integrirende Moletule neunt, erzeugt werden.

Bus der Definition des Ahomboeders folgt, has alle Rane ten bestelben einander gleich find, bas es ferner auf der Obers klache. Defielben zwenngt amolf gleiche Wintel giebt, deren zwen von einander verschiedene zusammen 180° betragen, daß also nur einer gegeben zu werden braucht, um alle übrigen zu haben.

⊈ - 96.

Aufg. Die Bante eines Abomboehers und ein eber ner Winkel auf der Oberfläche desselben ist gegeben: man soll die Oberfläche desselben, seinen körpgrlichen Inhalt, u. s. w. finden.

Aufl. Die Kante des Abomboeders sen = a, ein Wind kef desselben = a. Als Parallelepiped betrachtet, ift demnach c = b = a, 2 = \beta = a,

-1) Mins 5 Q1 findet man bie Derfidige bes Strpers,= 6,4 Sin. α, und ben Lubischen Inhalt 243 1/ Sin. & a Sin, La

2) Die Reigungswinkel der Ebenen Des Rhomboebers gen einander erhalt man aus 5 92. Man hat namlich in dem fpharifden Prenede bah, burd beffen Bintel Die gefuchten Rejgungen ber Seitenfidden beftimmt werden.

Sest man bennach biefen gleichen Reigungewintel = 4 (Tan A 10) 出点。3 fe ife

Sin.
$$\frac{1}{4} \mu = \frac{1}{2 \cos \frac{1}{4} \alpha} = \frac{1}{4} \sec \frac{1}{4} \alpha$$
.

5) Bit ben Diagonalfdnitt ACPH erhalt mantausig ich.

$$AC = 1/2 a^{s} (1 + Gos. \alpha) = 2 a Cos. \frac{1}{2} \alpha$$

$$Cos. HAC = \frac{2a \cdot Cos. \alpha}{2a \cdot Cos. \frac{1}{2} \alpha} = \frac{Cos. \alpha}{Cos. \frac{1}{2} \alpha}$$

$$Cos. \frac{1}{2} \alpha \cdot \frac{1$$

Der Flaceninhalt Diefes Schnittes ift =

4) Que 9 94 findet man ferner, Cos, hed = 0, 8. 6. der Diagonalichnitt flebet auf ber Grunbfidche perpendifuldr: 1 3 ...

gar die Diagonalen bes Rhomboebers erhalt man que ben dafelbit gegebenen Formeln folgende Ausbrutte: $AF = a \mathcal{V} (g + 6 \cos \alpha), HC = a \mathcal{V} (g - 2 \cos \alpha).$

Mufg. Die beyben Diagonalen ber Grangflachen eines Ahomboeders find gegeben: man foll daraus die Bance, bie ebenen Winkel, die Meigungewintel der Seirenflachen, Die Winkel, Seiten, und ben glacheninhalt eines Diagos nalschnittes, wie auch die Diagonallinie des Rhombose ders finden.

Auft Die Diagonalen EG, AF eines Ahvanden EFGH (Big. 34) halbiren fich gegenseitig, und Reben auf einander perpenditular, wie fich leicht erweisen laft. Da nun diefe Diagonaten gegeben find, so find auch ihre Halften gegebeit. Man fette daber EP = PG = g, HP = PF = p. hiere aus findet man die gesuchten Stade, wie folgt.

- v) Da HPG ein rechter Winfel ift, so ift HG == V(g- + p2) = a, und dies ift die Kante des Rhomboeders.
- 2) Die Pragonglen eines Rhomben halbiren bie: Bintel beffelben. Ce ift alfo, EHF = i EHG = ia, und demnach.

Tang.
$$\frac{1}{2}\alpha = \frac{5}{p}$$

worges fic ber Bintel bes Rhomben bestimmen latte

and if
$$\sin \frac{1}{4} \alpha = \frac{g}{V(g^a + p^a)}$$
, $\cos \frac{1}{4} \alpha = \frac{P}{V(g^a + p^a)}$

Sin.
$$\alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha = \frac{2 pg}{p^2 + g^2}$$

Cos. $\alpha = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2 = \frac{P^2 - g^2}{P^2 + g^2}$, wie benm Haup, in ber Meberf, bes angel. Wertes & 412 bes erften Cheiles.

3) Für ben Neigungeminfel ber Seitenflächen bar man

Sin,
$$\frac{1}{4}\mu = \frac{1}{2 \cos \frac{1}{4}\alpha} = \frac{V(g^2 + p^2)}{2p}$$

4) Far ben Bintel HAC des Diagonalionittes ACFH erhalt man aus 3 8 96,

Cos. HAC =
$$\frac{\text{Cos. }\alpha}{\text{Cos. }\frac{1}{4}\alpha} = \frac{p^2 - g^2}{p \, V(p^2 + g^2)}$$

Sin. HAC =
$$\frac{V(g^{a}p^{a}, g^{a} - g^{a})}{p V(p^{a} + g^{a})}$$

and baher,

wie benm Saun, G. 414.

- 5) AC = HF = 2p, $AH = HG = V(g^2 + p^2)$.
- 6) Aus 3 in § 96 ergiebt fic and ber Flaceninhalt beg. Diagonationittes ...

- 7) Die Diagonallinie des Ahomboeders erhalt man aus 4 in S 96; es ift namlich AF = V (9 $P^a 3g^a$), wie benm Dann, G. 411.
- 8) Per Flideninhalt bes Rhomboebers ift, nach 1 in § 96, = 6 a² Sin. α = 12 pg; und ber kubischen Inhalt = 22° V Sin. ξα Sin. ξα = 24° Sin. ξα² V(4 Cos. ξα² 1)

$$= \frac{2a^{2}g^{2}}{p^{2} + g^{2}} V \frac{3p^{2} - g^{2}}{p^{4} + g^{6}} = 2g^{2}V (3p^{6} - g^{2}).$$

\$ 98.

Aufg. In einem dreufeirigen Priling kenner man brey in einer Ecte ansammen ftoffende Kanten, wie auch die ebenen Winkel biefer Ecte; man foll die Reigungowinkel aller das Prifing begrangenden Siachen, ben körperlichen Inhalt, und die Oberflache bestelben finden.

Muft. Ce fen ABCDEF (Fig. 35) ein Prifma; AB = a, AC = b, AD = o, die gegebenen Kanten; BAC = a, BAD = o, CAD = v, die gegebenen Bintel.

2) Begen, ber betannten Bintel a, B, p, find auch bie Seiten bes fpharifden Prepertes bed betannt; alfo auch bie

is so.; alsdann ift F = a + b, + c + d + e + ic., $R = \frac{1}{2}(5a + 4b + 5c + 6d + 7e + ic.)$, weil die Amabla aller ebenen Wintel = 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + ic. Da nun die Summe aller Wintel eines Drevecks = 2R, eines Vierecks = 4R, eines Fünfecks = 6R, eines Sechsecks = 8R, eines Siebenecks = 10R, u. s., so ist die Summa aller ebenen Wintel = 2a + 4b + 6c + 8d + 10c + ic. rechten Wintelm. Es ist aber 4K = 6a + 8b + 10c + 12d + 14e + ic. 4F = 4a + 4b + 4c + 4d + 4e + ic.; daher 4K - 4F = 2a + 4b + 6c + 8d + 10c + ic. rechten Wintelm = ber Summe aller ebenen Wintel.

3us. Da 2K = 3F + 29 (§ 85), so ift 4K - 4F = 2F + 49. Die Summe aller ebenen Winkel kann baber nie kleiner als 2F rechte Winkel senn. Da fetner K = 3F - 6 - a (§ 85), so ift auch 4K - 4F = 8F - 24 - 4a. Die Summe aller ebenen Winkel kann daber nie größer als 8F - 24 rechte Winkel werden. Die Summe aller ebenen Winkel in Rechten ausgedruckt, kann daber nie anger bent Grangen 2F und 8F - 24 sallen.

\$.89.

Lebrfag. Die Summe aller ebenen Winkel auf der Obetfläche eines Korpers heträgt gerade fo viele rechte Winkel, als die um acht verminderte vierfache Echenzahl Einheiten enthält.

Bew Die Summe aller ebenen Wintel ift = 4K - 4F rechten Wintelnig Da nun F + E = K + 2, so ift K - F = E - 3, and daher 4K = 4E - 8.

Anmerk Diefen San, durch welchen man unmittelbar aus der Angell der Eden eines Körpers die Summe der ebenen Wintel, auf, der Oherfliche deffelben bestimmen tann, ift um fo merfwürdigere da es einen abnitchen San für die ober nen Figuren in hinficht auf das Berhaltniß zwischen ber Ansahl ver Gumme ihrer Wintet giete. Bedeutet namtich n die Anzahl der Seiten oder Wintel einer Figur, so ift, wie bekannt, die Gumme aller Wintel = 2 n — 4 rechten Winteln.

Lehrs. Körper, welche von lauter Dreyecken einger'schlossen, und deren Ecken nur von filns, oder von seche ebenen Winkeln gebilder werden, können nicht mehr und niche weniger als zwölf Ecken von der ersten Arr haben.

Sem. 1) Nach § 85 ift K = $\frac{1}{2}$ F + γ , und nach § 86 F + $4 + 2\gamma = 2E$. Da der Körper von lauter Preneden eingesichlossen wird, so ift (§ 82) $\gamma = 0$; also K = $\frac{1}{2}$ F, $E = \frac{1}{2}$ F + $\frac{1}{2}$

- 2) Es fen nun p die Angahl ber Eden, welche fünf, und q die Anjahl ber Eden, welche fechs Flächenwinkel haben; so ift E=p+q, und $K=\frac{1}{2}(5p+6q)$. Aus diesen ben Gleichungen findet man p=6E-2 K.
- 3) Segt man in diefen Ausbrud des p für K und E ihre Werthe aus 1, so erhalt man p = 12.

Bus. List man q unbestimmt, so etgeben fich für E, F, K, folgende Berthe: E = 12 + q, F = 20 + 2 q. K = 30 + 8 q.

Die Erfindung det hier vorgetragenen Gase am ber Lebe te von den edigen Rorpern haben wir größtembeils dem ber tahmian Gular ju verdanten; fie finden fich in den folgenden benden Abhandlungen:

- 1) Elementa doctrinae solidorum. Novi Commentarii acad. scient. Petrop. Tom. IV. ad an. 1752-55. p. 109.
- 2) Demonstratio nonnullarum infigaium proprietatum, quibus Solida hedris planis inclusa funt praedita. Cont. p. 14a.

• -----

VII. Aufgaben für Parallelepipeben, Prifmen, Pperramiben, und einige andere einfache Chreer.

" ,5 '91.

Aufg. Die brey Kanten eines Parallelepirebs, well che an einer Ede beffelben zusammen fichen, find geget ben, wie auch die Winkel, welche diese Linien nit einam der einschließen: man soll die Wberfläche und ben Lubischen Inhalt bes Rorpers-finden.

Aufl. Es sen ABCDEFGH. (fig. 33) vas Parallelepts ped; AB = a, AD = b; AH = c bie gegebenen Setten; BAD = a, BAH = \beta, HAD = \gamma, die gegebenen Wintel.

1) Es ift die Seitenstäche ABGD = ab Sin. \alpha, die Seitenstäche ABGH = ac Sin. \beta, die Seitenstäche ADEH = bo Sin. \gamma. Da nun sebe bieser flächen der ihr gegenüber lies genden gleich ift, so ist die gange Oberstäche =

2 (ab Sin. t + ac Sin. 5 + bc Sin. y).

2) & fen HR auf der Grundfidche perpendifular, bad ein fpharifches Dreped, beffen drep Seiten die, den gegeben nen Winteln gugeborigen Bogen find, hx ein Perpendifel auf BD. Aus f 41 hat man alsbann Bin hr

$$\sin HAR = \frac{2}{\sin \alpha} V \begin{bmatrix} \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma) \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma - \alpha) \times \\ \sin \frac{1}{2} (\alpha + \gamma - \beta) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma) \end{bmatrix}$$

Mun ift die Sohe HR = c Sin, HAR; und die Grundfläche. ABCD = ab Sin. a; folglich ift der Inhalt des Korpers mit. abc. Sin. a Sin. HAR =

2 abe
$$V$$

$$\begin{bmatrix} Sin, \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)Sin, \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) \\ Sin, \frac{1}{2}(\alpha + \gamma + \beta)Sin, \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \end{bmatrix}$$

Aufg. Unter den nämlichen Voraussenungen als im vorigen &, die Reigungswinkel der Granzflächen des Pas raftelepipede zu finden.

Aufl. Die Neigung der Senen ABGH, ABCD; ift burch den spharischen Bintel hbd, die ber Sbenen ADEH, ABCD, durch den Wintel bah, und die ber Sbenen ABGH, ADEH, durch den Bintel bad gegeben. Es ift aber

Sin. I had
$$= V \frac{\sin I (\beta + \gamma - \alpha) \sin I (\alpha + \gamma - \beta)}{\sin A \cos B}$$

Sin.
$$\frac{1}{2}$$
bdh = V . $\frac{\sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma - \alpha) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma)}{\sin \alpha \sin \gamma}$,

Sin.
$$\frac{1}{2}$$
 bhd $\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}$

woraus fic bie bren Bintel bbd, bdh, bhd, und fomit bie gesuchten Reigungewintel bestimmen laffen.

\$ 95.

Aufg. Unter ben nämlichen Voganssenungen, wie in § 91, die Sigur und den gladeninhalt eines Diagonalischnittes zu bostimmen.

Aufl. 2) Es fey ACFH (Fig. 34) ber qu berechnende Diagonalschnitt; bud ein sphar. Dreped, wie das in Fig. 33, and he ein Gogen aus der Spipe h nach dem Durchschnittse bunkte der Dingonale AGund bes Bogens bd.

2) Alebann ift im fpharifden Drenede bah,

Cos. d =
$$\frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma}$$

ynd im sphar. Dreneste odd,

Cos. hc = Cos. y Gos. dc + Sin. y Sin. de Cos. d. Subfituirt man in der zwepten Gleichung for Cos. d feinen Berth aus ber erften, fo erhalt man,

Gos, be = Cos,
$$\gamma$$
 Gos, dc + $\frac{(\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma) \sin \alpha}{\sin \alpha}$

5) Aus dem geradlinigen Drenede ACD, morin DC = a, DA = b, ADC = 180° - a, fludet man,

$$AC = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2 \text{ ab Cos. } \alpha)};$$

hierans ferner, vermittelft der Proportion AC ; DC =

Sin. dc =
$$\frac{1}{3}$$
 $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{$

und bemnach, was The

Cos, de
$$=$$
 $\frac{b + a \cos \alpha}{V(a^a + b^a + 2ab\cos \alpha)}$

4) Die Substitution Diefer Werthe von Sin, dc. Cos. de, in ber in 2 gefundenen Gleichung giebt,

Cos. hc = Cos. HAC =
$$\frac{a \cos \beta + b \cos y}{V(a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha)}$$

5) Dieraus erhalt man ferner,

$$V[a^2 \sin \beta^2 + b^2 \sin \beta^2 + 2ab(\cos \alpha - \cos \beta \cos \beta)]$$

$$V(a^2 + b^2 + 2ab(\cos \alpha)$$

Der Flacheninhale bes Perglielogramme ACFH ift aber WHA . AC , Sin. HAC; men hat bemnich folgenden Ausbruck bafür:

 $GV[a^2 \text{ Gin}, \beta^2 + b^2 \text{ Sin}, \gamma^2 + 2 \text{ ab (Cos, } \alpha - \text{Cos, } \beta \text{ Cos. } \gamma)].$

6) Aus 3 hat man die Linie AC; aus 4 ben Winfel HAC; und aus 5 ben Flacheninhalt bes Parallelogramms ACFH; mithin alles, was gesucht wurbe.

Buf. Um Diese Stade in bem Diagonalicnitte, welcher burd die Rangen BG, DE gebet, an bestimmen, barf man

sur die Ede A mit der Ede D vertauschen, und also in den gefundenen Ausdrücken 1800 — a für a, und 1800 — y für y segen, wodurch sich Cos. a in — Cos. a, und Cos. y in — Cos. p perwandelt.

5 94

Aufg, Unter ben Vorausstrumgen des S 31 die Dias gonallinie des Parallelepipedes, und die Ratung des Dias gonalichuites gegen die Grundstäche zu finden.

Aufl. 1) Man bente fic die Diagonalen HC, AF, ger sogen. Die Drepede HAC, ACF, geben aledann, weil Cos. ACF = - 'Cos. HAC.

 $HC^{2} = AH^{2} + AC^{2} - 2AH$, AC. Cos. HAC, $AF^{2} = CF^{2} + AC^{2} + 2CF$, AC. Cos. HAC.

Sest man hierin far AC und Cos. HAC ihre, im vorigen f ger fundenen Werthe, und AH = CF = c, fo erhalt man far die benden Diagonaten AF, HC folgende Andbrude :

 $\Delta F = V(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \alpha + 2ac \cos \beta + abc \cos \gamma)$ $HC = V(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \alpha + 2ac \cos \beta - abc \cos \gamma)$

2) Die Reigung der Sbenen ACFH, ABCD, ift durch ben spharischen Winfet had gegeben, es kommt also blog barauf an, diesen qu bestimmen,

Das fobdr. Dreved hao giebt,

Cos, hed = $\frac{\text{Cos. hd} - \text{Cos. he Cos. dc}}{\text{Sin. he Sin, dc}}$

Run ift Cos. hd = Cos. p; Cos. ho und Cos. de, Desgleischen Sin. he und Sin. de find im porigen \$ icon gefunden worden; man hat alfo, wenn biefe Substitutionen-gemacht werden, nach ber gehörigen Reduftion

Cos. hed =

a Cos. β — b Cos. β — Cos. α (a Cos. β — b Cos. γ) $\lim_{n \to \infty} \left[e^2 \sin_n \beta^2 + b^2 \sin_n \gamma^2 + 2 \text{ ab } (\text{Cos. } \alpha - \text{Cos. } \beta \text{ Cos. } \gamma) \right]$

Ein Rhomboeder ift ein Parallelepiped, welches burch feche gleiche und abnliche Rhomben begrangt wird. 3wen nan den einander gegenüber liegenden torperliden Binteln, wie A. F, (gig. 54) werden von drep gleichen ebenen Binkeln, fpige oder flumpfe, eingeschloffen. Jeder pon den fechs anderen wird burch einen ebenen Wintel, ber dem borigen gleich, und durch awen andere, welche die Complemente jener am 1800 find, begrangt. Diefe Art von Parallelepipeben verdient bes halh befonders bemertt gu merden, weil, fie nach Sany, einem ber berühmteften Mineralogen unfever Zeit, die primitive form ober Reingeftalt bes toblengefauerten Ralte ift, (m. f. Sann's Lebrbuch ber Mineralogies aberfest von Karften. Paris und Leipzig 1804),, que melder alle Barietaten biefes Foffils burd Auffdichtung fleiner, ber Rerngeftalt abnlicher Partitelden. welche herr Dann integrirende Molefule neunt, erzeugt merden.

Bus der Definition bes Ahomboeders folgt, bas alle Lane ten beffetben einander gleich find, daß es ferner auf der Obers klade. Paffelben zwenmat awolf gleiche Wintel giebt, deren zwen von einander verschiedene zusammen 1800 betragen, daß also nur einer gegeben zu werden braucht, um alle übrigen zu haben.

\$ 96.

Aufg. Die Rante eines Abomboeders und ein eber ner Winkel auf der Oberfläche desselben ist gegeben: man soll die Oberfläche desselben, seinen körmerlichen Inhalt, u. f. w. finden.

Aufl. Die Kante des Rhomboeders sen = a, ein Wintel desselben = a. Als Parallelepiped betrachtet, ift demnach c = b = a, 2 = \beta = a,

15 h 15 m 12 1

- mb ben Lubifchen Inhalt 2at V Sin. & a Sin, 4a.
- 2) Die Reigungswinkel der Sbenen det Rhomboeders ger gen einander erhalt man aus 5 99. Man hat namlich in dem ipharischen Prepede bah, durch deffen Winkel die gesuchten Reigungen der Seitenstächen bekimmt werden.

Sin. $\frac{1}{2}\mu = \frac{1}{2 \cos \frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2 \sec \frac{1}{2}\alpha}$

5) He den Diagonalschutt AGPH ethelt manidusis 155, AC = 1/2 a² (1 + Gos. α) = 2 a Cos. ξα (1 + Gos. α) = Cos, α (1 + Gos. α) = Cos

Der Glaceninhalt Diefes Schnittes ift =

Se ille 👙

2 a2 Sin. 1a. V (1 + 2 Cas. a).

4) Aus 9 94 findet man ferner, Cos. hod = 0, b. h. ber Diagonalfchnitt flebet auf ber Grundfides perpenbifuldr:

Får die Diagonalen des Abomboeders eihalt man aus den daselbft gegebenen Formeln folgende Ausdrücker 3 2 3 AF = a 1/ (3 + 6 Cos. a), HC = a 1/ (3 - 2 Cos. a),

97

Aufg. Die berben Diagonalen ber Grangflächen eines Abomboeders find gegeben: man foll daraus die Rance, die ebenen Winkel, die Reigungswinkel der Seicenflächen, die Winkel, Seiten, und den Flächeninhalt eines Diagos nalfchnittes, wie auch die Diagonallinie des Ahombose ders finden.

Kuft Die Diagonaten EG, MF eines Monden EFGH (Big. 34) halbiren fich gegenseitig, und fichen auf einander perpenditular, wie fich leicht erweisen laft. Da unn diefe Diagonaten gegeben find, so find auch ihre Adlften gegeben. Man fete daber EP = PG = g, HP = PF = p. hiere aus findet man die gesuchten Stade, wie folgt.

- v) Da HPG ein rechter Winfel ift, so ift HG == V(g" + p") = a, und dies ift die Kante des Rhomboeders.
- 2) Die Biagonglen eines Ahomben halbiren die Bintet deffelben. Et ff alfo, EHF = 1 EHG = 1 a., und demnach -

worgus fic der Wintel des Rhomben bestimmen läse.

and if Sin.
$$\frac{1}{4}\alpha = \frac{g}{V(g^a + P^a)}$$
, $\cos \frac{1}{4}\alpha = \frac{P}{V(g^a + P^a)}$

Sin.
$$\alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha = \frac{2 pg}{p^2 + g^2}$$

Cos. $\alpha = 1 - 2 \sin \frac{1}{4} \alpha^2 = \frac{p^2 - g^2}{p^2 + g^2}$, wie benm Haup, in ber Meberf, bes angef. Werkes & 412 bes erften Cheiles.

3) Bur ben Neignngeminfel ber Seitenflachen bar man nach & \$ 96,

$$\sin_{\epsilon} \xi \mu = \frac{1}{2 \cos_{\epsilon} \xi \alpha} = \frac{V(g^2 + p^2)}{2p}$$

4) Far ben Bintel HAC bes Diagonalionittes ACFH erhalt man aus 3 8 96,

Cos. HAC =
$$\frac{\cos x}{\cos \frac{1}{2}} = \frac{p^2 - g^2}{p V(p^2 + g^2)}$$

Sin, HAC =
$$\frac{\sqrt{(g \cdot p^2, g^2 + g^2)}}{p \cdot V(p^2 + g^2)}$$

und Saber,

wie benm Saun, G. 414.

- 5) AC = HF = 2p, AH = HG = $V(g^a + p^a)$.
- 6) Aus 3 in § 96 ergiebt fic and ber Flacheninhalt beg Diagonationittes

- 7) Die Diagonallinie des Rhomboeders erhält man aus 4 in 6.96; es ist nämlich $\Delta F = V(9P^* 3g^*)$, wie beym Haup, 6.411.
- 8) Per Flideninhalt bes Rhomboebers ift, nach 2 in § 96, = 6 a² Sin. a = 12 pg; und ber kuhischen Inhalt = 2x³ V Sin. 2 a Sin. 2a³ = 2a³ Sin. 2a² V (4 Cos. 2a² 2)

$$= \frac{2a^3 V \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}a^3}{P^2 + g^2} \frac{2g^3 V (3 P^2 - g^2)}{P^2 + g^2} = 2g^3 V (3 P^2 - g^2).$$

\$ 98

Aufg In einem dreufeirigen Priling kenner man beer in einer Eche ansammen ftoffende Banten, wie auch die ebenen Winkel biefer Eche; man foll die Reigingowinkel aller das Prifing begranzenden flachen, ben körperlichen Indalt, und die Oberflache bestelben finden.

Aufl. &6 fen ABCDEF (Fig. 35) ein Prima; AB = a, AC = b, AD = c, die gegebenen Kanten; BAC = a, BAD = p, CAD = p, die gegebenen Binfel.

2) Begen, ber betannten Bintel a, B, p, find auch bie Geiten bes fpharifden Prepentes bed bekannt; alfo auch bie

Winkel b, e, d, d. bie Reigungewintel ber Geitenflagen ADEB, ADFC, gegen die Grundflage und gegen einander felbft.

- 2) Im geradlinigen Drepede, ABC, tennet man bie best ben Geiteni AB, AC, und ben Bintel BAC, folgles auch bie Bintel ABC ACB, und die Geite BC.
- 3) Im spharischen Oreverle aco tennet man nun ben Bine fei. a. b, nebst ben Seiten ac, ac (= 180° 3), folgtich auch die Winkel a, e, und die Seite co. Der Minkel o giebt die Neigung der Chane BEFC, gegen die Grundsiche ABC, und der Minkel e die Neigung der namlichen Sbene gegen ABED:
- 4) An ber Ede C kennet man die Winket ACB (2), ACF = 180° p, und BCF = 180° CRE = 180° ce, folglich taßt sich auf eine ahnliche Art, wie ben A ber Neis gungswinkel ber Ebenen BCFE, ACFD finden.
- 5) Die Neigungswinkel der Seitenfidden gegen die obere Grundfide-DRF, find nichts anders, als die Erganzungen der respektiven Binkel, welche fie mit der untern Grundfidde machen.
- 6) Wer torperliche Inbalt eines Prifma ift Die Balfte von bem bes Parallelepipebe von doppelt so großer Grundfilche, und ift belinde = (f gr.).

abc 1 Sin.
$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2})$$
 Sin. $\frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)$
Sin. $\frac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta)$ Sid. $\frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)$.

7) Die Oberfidche des Prisma bestehet aus drey Baralles logrammen und awen Oreneden. Es ift aber ACB wardelogen. ABED = ag Sin, B, ACFD = be Sin, y. Da ferner BC und CBE schan ger sunden worden, so sessen BC = f, CBE = 4; alebann

if Paralleloge. CBEF = cf Sin. 4. Rimmt man alles bies fet gusammen, fo erhalt man die gesuchte Oberflache =

ab Sin, α + ac Sin, β + be Sin, γ + cf Sip, ζ_{α}

y 99."

Anfo In einer brevfelrigen Pyramide tennet man brey, in einer Ede gufammenftogenbe' Kanten, wie auch bie ebenen Wintel biefer Ede: man foll bie ebenen Wintel biefer Ede: man foll bie ebenen Wintel ber Geitenflächen, bie Weirfläche und ben torperlichen Inhalt Diefer Pyramibe finben.

Aufl. Es sen AbCD (fig. 36.) eine Phramide, worin die dren Kanten AB = a, AC = b, AD = c, wie auch die dren Winfel BAC = a, BAD = B, CAD = y, gegeben finde. Es sen ferner bdo das der Ede A, und ac'd das der Ede B angehörige sphärische Orened; DE ein Perpendifel auf der Grundsidde, und der Bogen do auf de perpendifulde.

- 1) Aus ben gegebenen Winteln tennet man die dren Seit sen des spharischen Drepectes bod, also auch seine Bintel b, c, d, d. h. die Reigungswinkel der Sbenen BAC, BAD, CAD.
- 2) In jedem bet Orepede BAC, BAD, CAD, kennet man zwen Seiten und ben eingeschloffenen Winkel, alfo auch die dritte Seite und die abeigen Winkel. Man kennet also bie Kanten BC, CD, BD, und die Winkel ABC, ACB, ABD, ADB, ACD, ADC.
- 5) Im fphdrifden Orepecke ac'd' tennet man nun die Seiten ab', ad', und ben Bintel a == b; folgtich auch bie Bintel c', d'; also die Reigungemintel der Sbenen ABC, CBD, ABD.
- 4) Die Wintel Des Drepedes BCD erhalt man aus ben Sefannten Seiten beffelben.

- 5) Alle ebenen Bintet ber Ede C find jum befannt, alfo auch die Reigung ber Sbenen ACD, BCD, gegen einander,
- 6) Die Drenede, welche Die Poramide begrangen, find wollig beftimmt; alfo lafte fich ihr Flaceninfalt auf mancher, lep Beife finden, folglich auch die Oberfidche ber Poramite.
- 7) Der Lubische Inhalt. bet Phramibe life fich aus 6 in § 98 finden, wenn man, von bem baselbft für ben kubischem Inhalt des Prisma gefundenen Anisdrucke den driefen Ebeil nimmt; denn eine Biramibe ift der driete Theil eines Prisma von gleicher Grundflache und gleicher hohe. Er ift bemnach

$$\frac{1}{3} \operatorname{abc} V \begin{bmatrix} \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma) \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma - \alpha) \\ \sin \frac{1}{2} (\alpha + \gamma - \beta) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma) \end{bmatrix}$$

Buf. Für ben tubifchen Inhalt ber Boramibe idfte fic auch noch ein anderec, wegen feiner Form mertwarbiger Mus. brud finden.

Aus dem fparifchen Drenecke bod erhalt man namlich,

Cos. dbc =
$$\frac{\text{Cos. } \gamma - \text{Cos. } \alpha \text{ Cos. } \beta}{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } \beta}$$

und daher, da Sin. dbc = 1/[1 - (Cos. dbc)*],

Sin. dbc ==

Sm rechtwintetigen fohdrifden Oregede bae bat mail ferner,

Sin. do = 8in. db Sin. dbc. Sin. DAE = 8in. 3 Sin. dbc. Hieraus erhalt man bie Hhe der Ppramibe

DE = DA Sin, DAE = c Sin, β Sin, dbc, and if $\triangle ACB = c$ Sin, α ,

Man bat bemnad

Bird bierin für Sin. abe bet vorhin gefundene Ausbrud git fege, fo erhalt man,

\$ 100.

Aufg. Ben kubischen Inhalt einer Pyramide aus ihren Ranten zu finden.

Aufl. i) Es sep in der Pyramide ABCD (Fig. 36) wie im vorigen S, AB = a, AC = b, AD = c; ferner set) BC = d, CD = e, BD = f.

2) Die Drepede BAC, BAD, CAD, geben,

Cos. CAD = Cos.
$$y = \frac{b^z + c^z - e^z}{z bc.}$$

5) Berben biefe Berthe von Cos. a, Cos. a, Cos. p, in bem, am Ende bes vorigen S's gefundenen Ausbrud subfit wirt, fo erhalt man,

4) Dierans etgiebt fic nach ber geborigen Entwidelung und Reduktion,

Erft. Buf. Wenn sowohl die drep Seitenlinfen der Spregmide, als auch die drep Seiten ihrer Grundfidche einander gleich find; so hat man e = 8 = f, a = b = d, und baber ppr. ABCD = 12 a2 V (3 c2 - a2).

3 went. Buf. Sind alle Lanten der Pyramide einander gleich, fo ift auch o = a, und man hat,

Por. ABCD 1 a 1/2

§:101,

Aufg. Den kubifchen Inhals einer parallel mit der Gruntoftache abgefürzten Dyramide gir finden.

Aufl. 1) Es sen ABCab (fig. 37) die abgefürzte Ppramide, beren kubischer Inhalt gesucht wird, und welche aus der gangen Ppramide ABCD erhalten wird, wenn man parrallet

syllel mit der Sryndfilche die Keinere Pyramide Dabe abschnetz .
det Demnach ift die abgefürzte Pyramide ABCcab =
Pyr. DABC — Pyr. Dabc.

- 2) Unter den verschiedenen Studen, die man als gegeben ausehen kann, will ich sotche nehmen, welche die einfachken Aesulsate geben, und fich, am leichteften massen laffen, name lich die beyden Grundslächen ABC, abo, und die Hohe Eq, und awar von den erkeren nur den Ridcheninhalt. Es sev die Grundsläche ABC = G, und abc = g; ferner die Hohe Eo = h. Wähte man nun die Hohe der ganzen Poramide DABC, so ware alles Uedrige leicht zu berechnen. Man seige daher DE = x; dies zieht De = x h.
- 3) Man weiß, daß fur jeden der Brundfidde parallelen. Schnitt abe die folgende Proportion flate findet;

Grundfl. ABC: abc = DA2: Da2 = DE2: De2. Es ift also $G: g = x^2 : (x - h)^2$,
ober VG: Vg = x : x - h;
worgus man findet,

$$\frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{g}} = \frac{\mathbf{p}\mathbf{E}}{\mathbf{p}\mathbf{E}}$$

$$\frac{\mathbf{h}\mathbf{V}\mathbf{g}}{\sqrt{g} - \sqrt{g}} = \mathbf{p}\mathbf{e}.$$

4) Es ift Dempad,

The Dabe is I DE x Grundfl.
$$ABC = \frac{I h G V G}{V G - V g}$$
 or $\frac{I h g V g}{V G - V g}$;

folglich die abgefürzte Poramide

ABCcab = Por. DABC - Por. Dabc =

$$\frac{\frac{1}{2}h\left(GVG-gVg\right)}{VG-Vg}=\frac{1}{2}h\left(G+g+VGg\right).$$

Seometrie II.

Anmert. Bermittelft dieser Formet laffen fic bemnach alle Rorper berechnen, welche als parallel abgefärzte Pyramiden angesehen werden können; also alle die, welche von zwen paraletelen Flächen begränzt werden, und deren Seitenkanten in einen einzigen Punkt zusammen laufen. Dier foigt die Berechnung eines Körpers, ber zwar ebenfalls von zwen parallelen Riaden begränzt wird, deffen Seitenkanten aber nicht in einen und benfelben Punkt zusammen kaufen.

102, ·

Aufg. Den tubifchen Inhalt eines vierfeitigen Borpers gu finden, welcher zwey einander bandatele Grundfichden hat, und beffen Seirenkanten nicht in einen einzigen Punte gusammen laufen:

Auf l. 1) ABCDdabo (Jig. 38) fen ein folder Korpet; ABCD, abod, seine benden parallelen Grundstächen. Ich will annehmen, daß die Seiten der benden viereckigen Grundstägen, nebst den Winkeln ABC = abc, ADC = adc, gegeben seinen. Man setze AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, ab = f, bo = g, cd = k, da = l, ABC = 3, ADC = o, die Hobe des Korpers = h, und verfahre wie solgt.

2) Man ziebe die Linien aE, bE, dG, i ber bB parallel; fie treffen die Grundfidde ABCD in den Puntten E, F, G. hierdurch entstehet das Prisma EBFGdabe, und der Korper ift nun in dieses Brisma, und noch einen anderen Rieper EGFCDAade zerlegt.

Der Inhalt des Prifing wird gefunden, wenn-man die Grundfiche EBFG = abed mit der Sobe h multiplicitet. Um den Inhalt des anderen Körpers zu finden, diebe man die Linien Gk, Gl, den Linien BA, BC, parallel; ferner die Linien dk, 41. Hierdurch wird dieser Körper in die Ppstamide dkGlD, und in die beiden Prismen EAadkG,

FCcalls gerlegt. Die bepben genannten Prismen können als die plissen awerer Parallelepipeden angeschen werden, desse Figundslichen die Parastelogramme AEGk, CFG! find, und derzu bis parastelogramme AEGk, CFG! find, und derzu bis wie der der der der gegenwärtig alles darauf an, den Richenindalt aller der Bierecke zu sinden, in melde die Geundsläche ABCD abgetheilt worden ist.

- 3) Denkt man sich die Diagonate AC gezogen, so iff,

 ΔBC = ½ ab Sin, β, ΔADC = ½ od Sin, b; ...

 also Erap. ABCD = ½ (ab Sin, β + od Sin, δ).
- 3) Dentt man fic eben fo in dem Bierecke abed die Diagonale ao gesogen , fo erhalt man auf eine ahnliche Arte. Eraps abed = Leap. EBFG = 1.(18 Sin. β + kl Sin. δ).
- 5) De Gk m BA m AB EB m AB ab m; a f,
 Gl m FC m; BC BF m BC dw , Dl m DC Cl m
 DA Ak m DA ad. m d h, Dl m DC Cl m
 DC cd m o k, L kGl m; ABC m B, L kDl m s; [9]
 findet man and eben die Art, whe die 5 und 4,

 L rap. DkGkm (a f) (b g) Sin. 4 + f(c k) (d l) sin 6.
- 5) Aus 3, 4, 5, erhalt man nun quo die Summe der Barallelogramme AEGL, CFGI. Es ift namtich diese Sumi me = Brap. ARCD Erap. EBFG Brap. DLGE.
 - = [(ag + bf 2fg) Sin, β'+ [cl + dk-2kl) Sin, &
- 7) Der Inhalt des Körpers ABCUdabo fie and in 196 mil [EBFG + IDkGl + I(AEGk + CFGl)]fi. 206 mil Substituirt man hierin für die Vierece ihre in 4, 5, 6, ger fundenen Werthe, so erhalt man für den Inhalt des gestückten Körpers den folgenden Ausbruck:

ih Sin, β[f(g+ib)+a(b+ig)] +ih Sin, δ[k(1+id)+c(d+i1)].

को तीर प्रोचे की अभिनेता कुल्ला है। विश्व के अध्यान के किए की जो tenues feb ABCDaube (fig. 59) bet im vorigen & benedinier Morber's a'bro'd! irgend ein beliebiger ber! Grundfidde paralla feler Schnitt; und baber bie Diagonate a'a' beffelben ebene fills ber Grunbfidde parallel. Stellet matt fic nim por, ber Bunte D nabere fic ber Dingonale AC; fo wird ber Binted ADC; = ade = a'diel immer großer, bis er endlich, wenn der Bunkt D in AC fallt, = 1800 wird. In diefem Kalle fallt aud jugleich ber Punft d in ac, und d' in a'c'. Man befommt hierdurch einen neuen Korper, welchen man, um ber Ginbildungstraft su Sulfe su tommen, fo entfteben laffen tann, das man die Ebene Des Drepedes abe fich feloft parale let berunter raden lagt, bis fie auf bas Drened ABC falle: Die Linip-an bleibe ben biefer Bewegung immet ber Grunde Aldie barallel, bis flexauf AC fallt, und beidreite entweben eine frumme, over dine gerade glache, und imar bie leutere Alendenn wann Die Sertenfahten As; Co. in einer und berfele ben Chene liegen, in welchem Kalle der ergenote Rorper eine abnefürgte brenfeitige Poranitte, wird. -In jedem anderen Ralle befdreibt Die Linig ag eine frumme Blache, und man ers balt einen Rorper, melder von gwen ebenen Drengden, swen ebenen Erapszen und einer trummen Glache begrangt wird.

Um ben Inhaltzeines solchen Körpers zu finden, darf man nur in dem, am Ende des vorigen s's gefundenen Ausdruck für den Karper ABCD dach, $\delta=180^\circ$ segen; alsdann wird sin. $\delta=0$, und man erdalt für den Körper, wovon gegewwartig die Rede ift, den folgenden Ausdruck:

i h Sin. p[[(g+ib)+a(b+ig)].

Der Korper 5 102 funn auch einen einwarts gebenben Bintel baben. 3R alsbann & ober A em folder Bintel,

fo leidet die bafeloft gefundene Fermel got teine Aenderung. If es B abte D, wie Sig. 40 für den Mintel, De jeigt, so muß man unter B oder d ben tonveren Wintel, alla bier uns ter d den tonveren Wintel ADC verfieben. Wan tann anch d den tonkapen Wintel senn laffen, wenn mur — Bin, d ans flats Sin, & gesetz wird.

§ 105.

Wenn man fic aus einem Rorper von ausgefetten Art ABCDdcba i(fig. 41) einen anderen Rorper von eben ber Art A/B'C/D'd'o'b'a', welcher nicht gerade bem vorigen abnlich gu fenn braucht, ausgeschnitten bente, fo betommt man einen boblen Rorper, ber febr mannigfaltiget Formen fabig ift, je nachdem die Form jener Korper und die Art, wie ber eine ans bem andern ausgeschnitten wirb, vericbieden ift. Der eine tann, um fic bie Sache ju verfinnlie den, als ein Rern bes anderen angefeben werben, ber fowohl in feiner Lage innerhalb bes anderen, als auch in feiner Rotm unendlich viele Abmechselungen guldft. Der tubifche Inhalt des boblen Porpers, der durch bas herausnehmen des Rerns entflehet, tann immer gefunden metben, wenn fowoht fur den Saupttorper, als fur feinen Rern, bie in § 102 anges gebenen Abmeffungen betannt find. IR namlich fur ben Rors per ABCDdcba, AB = a, BC = b, CD =0, AD = d, ab = f, bc = g. cd = h, da = 1, ABC = 3, $ADC = \delta_c$ die Sohe = h, und fur den Rerper A'B'C'D'd'c'b'a'. A/B' = a', B/C' = b', C'D' = c', D/A' = d', a'b' = l', $\mathbf{b}'\mathbf{c}' = \mathbf{g}', \ \mathbf{c}'\mathbf{d}' \Rightarrow \mathbf{k}', \ \mathbf{d}'\mathbf{a}' \Rightarrow \mathbf{l}', \ \mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}' = \beta', \ \mathbf{A}'\mathbf{D}'\mathbf{C} = \delta',$ und die bobe - h': fo bat man fur ben tubifden Inbalt bes boblon Rerpers felgenden Ausbrud:

Wenn die oberen Grundflachen des Sauptforpers und des Rerns, abed, ab'c'd', besgleichen die unteren Grundflachen, ABCD, AB'C'D', in einer Sbene liegen, so ift h = h', und man erhalt den Lubifchen Inhalt eines durchlocherten Rorgers.

J 106.

Aufg. Den kubischen Inhalt eines Pontons zu finden.

Aufl. Ein Ponton bildet, wenn man fich feine Sow lung quagefüllt denkt, einen Korper, welcher von zwen pas rpfleien Rechteden ABCD, abcd, (Fig. 42) und vier vieredie gen Seizenstächen AabB, BboC, CodD, DdaA, begränzt wird. So betrachtet, gehört demnach der Nouton zu demjenigen Lärper, welcher in § 102 berechnet worden.

Es sen AB = a, BC = b, ab = f, bc = g, die Ho. be des Poutons = h. hier ift also c = a, d = b, k = f, l = g, \beta = go. Substituirt man diese Werthe, so exhalt man den Inhalt des ausgefüllten Pontons =

Diese Kormel findet auch Kaftner in der zweyten Samml seiner geometrischen Abhandl. Seite 79, vermittelst der Integralerechnungs Was ich hier g genannt habe, ist ben ihm e.

Für ben hoblen Ponton, wie er wirklich ift, findet man aus S 105, wenn a', b', f', g', h', das für die innere Aldche bestelchnen, was a', b, f, g, h, får die dufere, fold genden Ausbrud:

5 to7. - 1 1 1 1/2

Aufg. Swifchen ben feche Wintein, unter welchen bie Grangflachen einer brevfeirigen Pyramide gegen; eine ander geneigt find, eine Gleichung zu finden.

Aufl. In der Ppramide ABCD (Sig. 43) bezeichne man die vier Grangsachen ABC, ADB, ADC, BDC, in der Ordnung wie fie hier genannt worden, durch A, B, C, D; ferner die Wintel, welche die Flachen A und B, A und C, A und D, B und C, B und D, C und D einschließen, nach eben der Ordnung, durch a, \beta, \gamma, \delta, \gamma, \delta, \gamma, \delta, \gamma, \delta, \gamma, \delta, \del

- 2) Man folle auf die Stene ABC das Perpenditel DE, won E auf AB, das Perpenditel EF, und siehe die gerade Linie DF; alsdaus ift DFB der Neigungswintel der Stenen A, B, und daber = a.
- 2) Die Orenecke BAE, BAD, haben die gemeinschaftlische Grundlinie AB, und verhalten fic demnach wie ihre Sosten EF, DF. Man hat daher,

DF: EF = \triangle BAD: \triangle BEA, eder 1: Cos. α = B: \triangle BEA; und dies gibbt \triangle BEA = B Cos. α .

Auf die namiiche Art findet man,

 \triangle AEC \rightleftharpoons C Cos. β , \triangle BEC \rightleftharpoons D Cos. γ ;

und bieraus. :

- BAC = A = B Cos. a + C Cos. B + D Cos. y

3) Sur bie anderen Gladen und Wintel ber Ppramibe erhalt man abnliche Gleichungen; in allem folgende vier:

- 1) A = B Cos. a + C Cos. B + D Cds. y
- 2) B = A Cos. a + C Cos. 5 + B Cos. 5
- 3) $C = A Cos. \beta + B Cos. \delta + D Cos. \zeta$
- ... 4) Diss A Conjunt B Con a to C Con 3.

Mus biefen Gieldungen muß man nun bie Gebgen A, B, C, D, gu eliminiren fuchen.

4) Man fete, der Rurge wegen, die Buchkaben a, B, 9; 5, e, Z, für Cos. a, Cos. B, Cos. v, Cos. c, Cos. e, Cos. &, tind substitute den Werth von D aus ber vierten Gleichung in den bren erften Gleichungen; dies giebt:

$$(\gamma^2 - 1) A + (\alpha + \gamma \epsilon) B + (\beta + \gamma \epsilon) C = 0$$

$$(\alpha + \gamma \epsilon) A + (\epsilon^2 - 1) B + (\delta + \epsilon \epsilon) C = 0$$

$$(\beta + \gamma \epsilon) A + (\delta + \epsilon \epsilon) B + (\epsilon^2 - 1) C = 0$$

5) Eliminirt man C aus bet gwenten and britten, wie auch aus ber erften und britten Gleichung, fo erhalt man;

$$[(\beta + \gamma \zeta) (\delta + \varepsilon \zeta) - (\alpha + \gamma \varepsilon) (\zeta^2 - 1)] A$$

$$+[(\delta + \varepsilon \zeta)^2 - (\varepsilon^2 - 1) (\zeta^2 - 1)] B = 0$$

$$[(\beta + \gamma \zeta)^2 - (\gamma^2 - 1) (\zeta^2 - 1)] A$$

$$+[(\delta + \varepsilon \zeta) (\beta + \gamma \zeta) - (\alpha + \gamma \varepsilon) (\zeta^2 - 1)] B = 0$$

6) Die Elimination bes B aus diefen beoden Gleichungen, und die Divifion durch A giebt,

$$[(\beta + \gamma\xi)(\delta + \varepsilon\zeta) - (\alpha + \gamma\varepsilon)(\xi^2 + 1)] \times \\ [(\delta + \varepsilon\xi)(\beta + \gamma\xi) - (\alpha + \gamma\varepsilon)(\xi^2 + 1)] \times \\ -[(\beta + \gamma\xi)^2 - (\gamma^2 + 1)(\xi^2 + 1)] \times \\ [(\delta + \varepsilon\xi)^2 - (\varepsilon^2 + 1)(\xi^2 + 1)] = 0$$

7) Wird diese Gleichung reducire, und far a, B, y, u. s. w. wieder Coi. a, Cos. By Cos. y, u. s. wifubstkuirt, so erbalt man undlich,

- 1—(Cos. α^2 + Cos. β^2 + Cos. γ^2 + Cos. δ^2 + Cos. δ^2
- 2 (Cos. a Cos. B Cos. o + Cos. a Cos. y Cos. & +
 - Cosi & Cos. y Cos. 4 + Cos. & Cos. & Cos. 3

- a (Cos. α Cos. β Cos. ε Cos. ζ + Cos. α Cos. γ Cos. δ Cos. ζ +
Cos. β Cos. γ Cos. δ Cos. ε)

= 0.

Anmert. Diefe Gleichung giebt die Begiebung amifchen' ben Binteln'a, \beta, \gamma, \delta, \cdot, \delta, \de

5 108.

- 2 Aufg. Drey auf einander perpendikulare Grangflatchen einer dreyseitigen Pyramide find ihrem Slacheninhalt te nach gegeben: man foll ben Slacheninhalt der vierten finden.
- Aufl. 1) DAEB (Fig. 43) sen eine solche Pyramide, beren bren Seitenfidden DEA, DEB, AEB, auf einander perpendikular fieben. Diese dren Seitenflächen sind ihrem In, halte nach gegeben; es sen also ABEA = A, ADEA = B, ABED = C. Die dren Kanten DE, AE, BE, stebest auf einander perpendikular, find aber unbekannt; man sesse daseer AE = x, BE = y, DE = z.
- 2) Ziehet man auf AB das Perpendikel EF, fo iftebet auch DF auf AB perpendikular, und es ift . DAB = LAB × DF.
- 4) Die Orenecke BAE, EAF, find einander apnlich; man hat also,

BA:BE = AE:EF

ober 4150 Avi(Fustrials) (1 h x : Eth 15 13

$$EF = \frac{xy}{V(x^2 + y^2)}$$

4) Da die Ebenen DEA, DEB, auf der Ebene AEB pera pendikular fteben, fo ift auch DE auf dieser Ebene, und das ber auch auf EF perpendikular; also,

$$DF^{2} = EF^{2} + DE^{2} = \frac{x^{2}y^{2} + x^{2}z^{2} + y^{2}z^{2}}{x^{2} + y^{2}}$$

und daber

$$\triangle DAB = \frac{1}{2}AB \cdot DF = \frac{1}{2}V(x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2).$$

5) Es ift aber my = 2A, nz = 2B, yz = 2C. Bers ben diefe Berthe fubstituirt, fo erhalt man,

$$\Delta DAB = V(A^2 + B^2 + C^2).$$

Buf. Aus diefem Resultate ergiebt fic der folgende, febr merkwürdige, dem pnihagorischen abntiche Lehrsag: `

In jeder dreuseitigen Dyramide, die einen karperlichen rechten Winkel hat; ist das Quadrat der, bies sem Winkel gegenüber liegenden glache, so groß als die Summe der Quadrate der drey ihn einschließem den glachen.

§ 10g.

Aufg. Drey in einer Ede einer Pyramide 31fams men ftobende Ranten, nebst den von ihnen eingeschlosse, nen ebenen Winteln sind gegeben: man soll den Salbmes fer ber, um dieser Pyramide beschriebenen Rugel finden.

Anfl. ARCD (fig. 44) fen eine Byramibe; beren Kansten AD = 2a, BD = 2b, CO = 20, und Binfel BDC = a, ADC = \beta, ADB = \beta, gegeben find; man foll bin halbs meffer ber umschriebenen Rugel finden.

1) Ce fen P der Mittelpunkt diefer Augel, und Pp, Pq, Pr, auf den Kanten AD, BD, CD, perpendifuler gezogen;

bierdurch werden tiefe leptern halbirt, und man bat baber Dp = a, Dq = b, Dr = c. Der gefuchte halbmeffer fen nun = x

- 2) Man bente fich mit einem beliebigen Salbmeller, etma DC, aus D, als Mittelpunkt, eine Rugelfliche beighriebeng verlangere DP bis fie die Rugelfliche in a trifft, und wert binde die Puntte C, a, b, a, burch Bogen größter Kreise.
- 3) Aledann ift in den fpharischen Drepeden Caa, Cab,

$$Cos. Cxb = \frac{Cos. Ch - Cos. Cx Cos. bx}{Sin. Cx Sin. bx}$$

$$Cos. axb = \frac{Cos. ab - Cos. ax Cos. bx}{Sin. ax Sin. bx}$$

4) Es ift aber,

Cos.
$$ax = Cos. aDx = \frac{a}{x}$$
, Sin. $ax = \frac{V(x^{2} - a^{2})}{x}$,

Cos.
$$bx = Cos. bDx = \frac{b}{x}$$
, Sin. $bx = \frac{V(x^a - b^a)}{x}$,

Cos.
$$Cx = Cos. CDx = \frac{c}{x}$$
, Sin. $Cx = \frac{V(x^2 - c^2)}{x}$,

Cos. Ca = Cos. Br Cos. Gb = Cos. a, Cos. alf = Cos. y.

5 Werben Die Berthe aus 4 in ben Gleichungen im 3- fubstituire, fo erhalt man,

Cos.
$$C\pi a = \frac{x^2 \cdot Cosi\beta - acj}{\sin M(x^2 - a^2)}$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{Cos. } \mathbf{a} \times \mathbf{b} & & & & & \\
\text{Cos. } \mathbf{a} \times \mathbf{b} & & & & & \\
\text{Cos. } \mathbf{a} \times \mathbf{b} & & & & & \\
\end{array}$$

6) Da Cxa + Cxb + axb = 360°; alfo Cxa + Oxb = 560° - axb, Cos. (Cxa + Cxb) = Cos. axb, und das ber, wie ben einer abnitoen Gleichung, in x § 55 gezeigt worden,

1,
$$+$$
 2 Cos. $C \times a$ Cos. $C \times b$ Cos. $a \times b =$ (Cos. $C \times a$)² + (Cos. $a \times b$)².

Werden hierin für Cos. Ox 2; Cos. Cx b, Cos. ax b, ih; re Werthe aus 6 substituirt, and wird hierauf alles mit $(x^2 - a^2)$ $(x^2 - b^2)$ $(x^2 - q^2)$ multiplicirt, so erhalt man die Gleichung,

$$(x^2 - a^2) (x^2 - b^2) (x^2 - c^2) +$$
2 $(x^2 \cos, \alpha - bc) (x^2 \cos, \beta - ac) (x^2 \cos, \gamma - ab) =$
 $(x^2 \cos, \alpha - bc)^2 (x^2 - a^2) + (x^2 \cos, \beta - ac)^2 (x^2 - b^2)$
 $+ (x^2 \cos, \gamma - ab)^2 (x^2 - c^2).$

7) Diese Gleichung reducirt sich, wenn man das, was sich ausbebt, wegläße, und hernach durch x* dividirt, auf eine retine quadratische Gleichung, und giebt, wenn noch überdies, sin. α², Sin. β², Sin. y², sur 1 — Cos. α², 1 — Cos. β², 1 — Cos. γ² geset wird, x =

$$\begin{bmatrix}
a^2 \sin \alpha^2 + b^2 \sin \beta^2 + e^2 \sin \gamma^2 - 2ab(\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta) \\
- \frac{1}{2ac(\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma) - 2bc(\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)}
\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{1 - (\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2) + 2\cos \alpha \cos \beta \cos \beta}$$

Buf. Sind die Bintel an der Spige einander gleich, fo hat man a = 3 = 2, und der gefundene Ausbruck vermans belt fich in den folgenden:

$$V_{\frac{(a^2 + b^2 + c^2) \sin^2 \alpha^2 - (2ab + 2ac) + bc) (Cos \alpha - Cos, \alpha^2)}{1 - 3 Cos, \alpha^2 + 2 Cos, \alpha^3}$$

Bene man hierin i - Cos. an for Sing an fest; and hierauf ben Idhler und Renner bes unter bem Wurzeizeichen befindlichen Bruches burch i - Cos. a bivibirt, fo erhalt man,

$$x = V \frac{(a^{2} + b^{2} + c^{2})(1 + \cos \alpha) - (2ab + 2ac + 2bc) \cos \alpha}{1 + \cos \alpha - 2 \cos \alpha^{2}}$$

If poch überdies a = b = c, jo ift .

$$x = aV \frac{3 - 3 \cos \alpha}{1 + \cos \alpha - 2 \cos \alpha} = aV \frac{3 - 3 \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + 2 \cos \alpha)}$$

Für a = 60° ift x = a 1/2; Die Byramide ift alsbann ein reguldres Cetrueber, beffen Rante = 2 a ift.

Aufg. In einer gleichseitigen Peramite, welche ein regulates Vieled jur Gruntofläche, und baber fauter gleiche Slachenwinkel an der Spine bat, ift die Große eines solchen Winkels gegeben: man foll daraus die übrigen Winkel des Korpers finden.

Aufl. AB, BC, (Rig. 45) mögen zwen Seiten ber res gularen Grundfliche, und M der Mittelpunkt diese Bieled's fenn; L sen die Spige der Ppramide, also LM ihre Hohe und LA = LB = LC, ihre Seitenlinien. Der Boraussetz zung zusolge, ift ALB = BLC als einer von den Jlachenwinzteln, welche die Spige L gemeinschaftlich haben, gegeben; er sen = \mu. Aus diesem laffen sich nun alle übrige Binkel bestimmett, and zwar wie folgt.

- 1) In den gleichschenkeligen Oreneden, welche die Sriten flachen der Byramide ausmachen, findet man jeden Bintel an ber Grundflache = 90° ½ u.
 - 2) In der Grundfliche feloft findet man, wenn n bie Ans

PColific cottops, The day the prior Pillage to non at his wille fen ABCDauberfig. 39) bet im vorigen & berechnies Borbers abroidt frgend ein betiebiger bert Grundfidde parall Bifer Schifft; und 'ofter bie Diagonate a'q' beffelben ebens fife ber Brunbflache parallel. Stellet man fic nim vor, ber Munte D nabere fic ber Diagonale AC; fo wird ber Bintel ADC; = ade = a'de immer großer, bis er endlich, wenn ber Bunk. D in AC fallt, = 1800 wird. In diefem Rafle fallt auch aucheich ber Bunft d in ac, und d' in a'c'. Man befommt hierdurch einen neuen Rorper, welchen man, um ber Ginbildungstraft su Gulfe su tommen, fo entfteben laffen Ednn, bas man die Ebene Des Drepedes abe fich felbft parale let berunter raden taft, bis fie auf bas Dreped ABC falle: De Linip-ao bleibt ben biefer Bewegungt immet ber Grunde Radie barallel , bis fleriauf AC fallt, und befdreite entweten eine frumme, ober dine gerabe. Flache, und smar bie lesjere Alexann; warm Die Seitenfahten As; Cog in einer-und derfele ben Chene liegen, in melden Salle der: ergeugte Rorpen eine abnefürgte brevfeitige Phramitte, wirb. -In jedem anberen Ralle befdreibt bie Linig ac eine frumme Blache, und man ers balt einen Rorper, melder von zwen ebenen Dreneden, gwen ebenen Erapszeit und einer frummen Sidde begrangt wirb.

Um den Inhaltzeiges solchen Körpers zu finden, darf man nur in dem; am Ende des vorigen s's gefundenen Ausbrucke für ben Karper ABCDdacb, 6 = 180° fegen; alsdann wird sin. 4 = 0, und man erhält füt den Körper, wovon gegen wärtig die Rede ift, den folgenden Ausbruck:

in Sin. s[f(g+ib)+a(b+ig)].

Der Körper 5 102 thim auch einen einwarts gebenben Bintel haben. If alebann C ober A ein forcher Bintel,

fo leibet die baselbft gesundene Formel ger leine Aenberung. If es B abre D, wie Fig. 4p für den Minfel, Dezeigt, so muß man unter 8 voer 8 den konveren Winfel, alsa bier uns ter 8 den konveren Winfel ADC verfieben. Wan kann auch 5 den konflapen Winkel senn laffen, wenn nur — Bin, 5 ans flats Sin. 6 gesett wird.

§ 105.

Wenn man fic aus einem Korper von ber in § 102 vorausgesetten Art ABCDdcba ((Sig. 41) einen anderen Korper von eben ber Art A/B'C'D'd'c'b'a', welcher nicht gerade Dem vorigen abnilich gu fenn braucht, ausgeschnitten bentt, fo betommt man einen boblen Rorper, ber febr mannigfaltiget Formen fabig ift, je nachdem die Korm jener Korper und die Art, wie ber eine ans bem andern ausgeschnitten wird, verichieben ift. Der eine tann, um fich bie Sache gu verfinnlie den, als ein Rern des anderen angesehen werben, ber fowohl in feiner Lage innerhalb bes anderen, als auch in feiner Rotm unendlich viele Abmedfelungen gulaft. Der Lubifche Inhalt des hobien Lorpers, der durch bas herausnehmen des Rerns entftebet, tann immer gefunden werden, wenn fowoht für den Saupttorper, als für feinen Rern, bie in § 102 anges gebenen Abmeffungen befannt find. 3ft namlich fur ben Rore per ABCDdcba, AB = a, BC = b, CD =0, AD = d, ab = f, bb = g od m b, da = 1, ABC = 3, $ADC = \delta_C$ Die Hohe = h, und fur den Kerper A'B'C'D'd'o'bla'. A/B' = a', B/C' = b'; C'D' = c', D'A' = d', a'b' = l', $b'e'=g', c'd'\Rightarrow k', d'a'\Rightarrow l', A'B'C'\Rightarrow \beta', A'D'C\Rightarrow \delta',$ und die Bobe = h': fo bat man fur ben tubifden Inbalt des boblen Astroers feldenden Ausgrud:

Wenn die oberen Grundflachen des hauptforpers und des Rerns, abod, a'b'c'd', desgleichen die unteren Grundflachen, ABCD, A'B'C'D', in einer Stene liegen, so ift h = h', und man erhalt den kubischen Inhalt eines durchlocherten Rorgers.

J 106.

Aufg. Den kubischen Inhalt eines Poutons gutfinden.

Muft. Ein Ponton bilbet, wenn man fich feine Solving quagefüllt benkt, einen Korper, welcher von zwen par rolleten Rechteden ABCD, abcd, (Fig. 42) und vier vieredie gen Seitenflächen AabB, BbcC, CodD, DdaA, begrangt wird. So beerachtet, gehört bemnach ber Bonton zu bemjenigen Larper, welcher in § 102 berechnet worden.

Es sen AB = a, BC = b, ab = f, bc = g, die Ho. fe des Pontons = h. Dier ift also c = a, d = b, k = f, l = g, \beta = 90°. Substituirt man diese Werthe, so exhalt man den Inhalt des ausgefüllten Pontons =

 $\frac{1}{1}$ h [f (2g+b) + a (2b+g)].

Diese Kormel findet auch Kaftner in der zwenten Samml seiner geometrischen Abhandl. Seite 79, vermittelft der Integrals rechnungs Was ich hier g genannt habe, ift ben ihm e.

Für ben hoblen Ponton, wie er wirklich ift, findet man aus S 205, wenn a', b', f', g', h', bas für die innere Ridche. defielben bezeichnen, was a, b, f, g, h, far die dusere, folgenden Ausdrud:

\$ 107.

Aufg. Swifchen ben feche Winten, unter welchen bie Grangflächen einer breyfeitigen Prramide gegen; eine ander geneigt find, eine Bleichung zu finden.

Aufl. In der Pramide ABCD (Fig. 43) bezeichne man die vier Granzsischen ABC, ADB, ADC, BDC, in der Ordnung wie sie hier genannt worden, durch A, B, C, D; ferner die Wintel, welche; die Flachen A und B, A und C, A und D, B und C, B und D, C und D einschließen, nach eben der Ordnung; durch a, B, P, S, E, Z. Zwischen diesen Winteln soll man eine Gleichung sinden.

- 1) Man falle auf die Sbene ABC bas Perpenditel DE, won E auf AB, bas Perpenditel EF, und giehe die gerade Linie DF; alebaus ift DFE der Reigungswinkel der Sbenen A, B, und daher = \alpha.
- 2) Die Orenecke BAE, BAD, haben die gemeinschaftlie de Grundlinie AB, und verhalten fic demnach wie ihre Ho. ben EF, DF. Man hat daher,

DF: EF $= \triangle$ BAD: \triangle BEA, ober 1: Cos. $\alpha = B: \triangle$ BEA; und dies gibbt \triangle BEA = B Cos. α .

 \triangle AEC \Longrightarrow C Cos. β , \triangle BEC \Longrightarrow D Cos. γ ;

und hieraus, ...

 $\triangle BAC = A = B Cos. a + C Cos. \beta + D Cos. \gamma$

3) gur bie anderen Gladen und Wintel ber Ppramibe erhalt man abnliche Gleichungen; in allem folgende vier:

- 1) A = B Cos, a + C Cos, B + D Cos, y
- 2) B = A Cos. α + C Cos. δ + D Cos. ε
- 3) $C = A Cos. \beta + B Cos. \delta + D' Cos. \zeta$
- 2004) Director Good of the Good of the Good S. . . .

Mus biefen Gleichungen muß man nun bie Gebien A, B, C, D, ju eliminiren fuchen.

4) Man fese, der Rurge wegen, die Buchkaben a, b, v, o, e, e, e, für Cos. a, Cos. B, Cos. v, Cos. o, Cos. e, Cos. e, dind fübsticutre den Werrd von D aus ber vierten Gleichung in den drey ersten Gleichungen; dies giebt:

$$(\gamma^{2}-1) \cdot A + (\alpha + \gamma \epsilon) \cdot B + (\beta_{0} + \gamma \xi) \cdot C = 0$$

$$(\alpha + \gamma \epsilon) \cdot A + (\epsilon^{2} - 1) \cdot B + (\delta + \epsilon \xi) \cdot C = 0$$

$$(\beta + \gamma \xi) \cdot A + (\delta + \epsilon \xi) \cdot B + (\xi^{2} - 1) \cdot C = 0$$

5) Eliminist man C aus bet gwenten and britten, mie auch aus ber erften und britten Gleichung, fe, erhalt man:

$$[(\beta + \gamma \zeta) (\delta + \varepsilon \zeta) - (\alpha + \gamma \varepsilon) (\zeta^2 - 1)] A$$

$$+[(\delta + \varepsilon \zeta)^2 - (\varepsilon^2 - 1) (\zeta^2 - 1)] B = 0$$

$$[(\beta + \gamma \zeta)^2 - (\gamma^2 - 1) (\zeta^2 - 1)] A$$

$$+[(\delta + \varepsilon \zeta) (\beta + \gamma \zeta) - (\alpha + \gamma \varepsilon) (\zeta^2 - 1)] B = 0$$

6) Die Elimination bes B aus Diefen benden Gleichungen, und Die Divifion durch A giebt,

7) Wird diese Gleichung reducirt, und für a, B, y, u. s. wieder Cos. a, Cos. By Cos. y, u. s. fu wi substituirt, so erhalt man endlich,

- 1-(Cos. α^2 + Cos. β^2 + Cos. γ^2 + Cos. δ^2 + Cos. ξ^2 + Cos. ξ^3)
- + (Cos. α^2 Cos. ζ^2 + β^2 Cos. ζ^2 + Cos. γ^2 Cos. δ^2)
- 2 (Cos. a Cos. β Cos. δ. + Cos. a Cos. y Cos. ε + ... i

Cosi & Cost y Cos. & + Cos. & Cos. & Cos. &

- 2 (Cos. α Cos. β Cos. ε Qos. ζ + Cos. α Cos. γ Cos. δ Cos. ζ +
(Cos. β Cos. γ Cos. δ Cos. ε)

= 0.

Anmert. Diese Gleichung giebt die Beziehung zwischen ben Bintein a, B, y, d, e, 2. Bermittelft berfetben ift man fin Stande, wenn funf diefer Wintel gegeben find, ben feche ften zu finden.

\$ 108.

2 Aufg. Drey auf einander perpendikulare Grangflat den einer dreyseitigen Pyramide find ihrem flacheninhalt te nach gegeben: man fon ben glacheninhalt ber vierten finden.

- Aufl. 1) DAEB (Fig. 43) fer eine solche Pyramide, beren dren Seitenstächen DEA, DEB, AEB, auf einander perpendikular stehen. Diese dren Seitenstächen sind ihrem Inshalte nach gegeben; es sen also ABEA = A, DEA = B, ABED = C. Die dren Kanten DE, AE, BE, stehest auf einander perpendikatär, sind aber unbekannt; man sesse daseer AE = x, BB = y, DE = z.
- 2) Ziehet man auf AB das Perpendifel BF, fe finhet auch DF auf AB perpendifulde, und es ift . DAB = 3 AB × DF.
- 4) Die Prepede BAE, EAF, find einander abnlich; man hat also,

BA : BE = AE : EF,

1 360

$$EF = \frac{xy}{V(x^2 + y^2)}.$$

4) Da die Ebenen DEA, DEB, auf der Ebene AEB pera penditutär steben, so ift auch DE auf dieser Ebene, und dar her auch auf EF perpenditutär; also,

$$DF^{2} = EF^{2} + DE^{2} = \frac{x^{2}y^{2} + x^{2}z^{2} + y^{3}z^{2}}{x^{2} + y^{2}}$$

und daber

$$\triangle DAB = \frac{1}{2}AB \cdot DF = \frac{1}{2}V(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2).$$

6) Es ift aber my = A, ms = 2B, y2 = 2C. Bere ben diefe Berthe fubstituirt, fo erhalt man,

$$\Delta DAB = \nu (A^2 + B^2 + C^2).$$

Buf. Aus diefem Refultate ergiebt fic der folgender febr merkwurdige, dem pothagorifden abntiche Lebrfan:

In jeder drevseitigen Dyramide, die einen karperle chen rechten Winkel hat; ist das Quadrat der, hier sent Winkel gegenüber liegenden Släche, so groß als die, Summe der Quadrats der drey ihn einschließem den Slächen.

§ 10g.

Aufg. Drey in einer Ede einer Pyramide aufammen ftoffende Ranten, nebst den von ihnen eingeschlossenen ebenen Winkeln find gegeben: man soll den Saldmess fer ber, um dieser Pyramide beschriebenen Rugel Anden.

Anfl. ARCD (Fig. 44) fen eine Boramide; deren Kanten AD = 2a, BD = 2b, CO = 20, und Bintel BDC = a, ADC = B, ADB = p, gegeben find; man foll ben Dalbe meffer ber umschriebenen Rugel finden.

1) Ce fen P der Mittelpunkt Diefer Augel, und Pp, Pq, Pr, auf den Kanten AD, BD, CD, werpendisulfr gezogen;

hierburch werben biefe lettern halbirt, und man bat daber Dp = a, Dq = b, Dr = ... Der gesuchte Salbmeffer fen

- 2) Man dente fich mit einem beliebigen Salbmeller, etma DC, aus D, als Mittelpunkt, eine Rugelflache beichrieben verlangere DP bis fie die Rugelflache in a trifft, und pere binde die Puntte C, a, b, a, burch Bogen größter Rreife.
- 3) Alebann ift in den fpharifden Drepeden Caa, Cab,

Cos. Cxa =
$$\frac{\text{Cos. Ca} + \text{Cos. Cx *Cos."ax}}{\text{Sin. Cx Sin. 4x}}$$

Cos.
$$Cxb = \frac{Cos. Cb - Cos. Cx Cos. bx}{Sin. Cx Sin. bx}$$

$$Cos. axb = \frac{Cos. ab - Cos. ax Cos. bx}{Sin. ax Sin. bx}$$

4) Es ift aber,

Cos.
$$ax = Cos. aDx = \frac{a}{x}$$
, Sin. $ax = \frac{V(x^a - a^a)}{x}$,

Cos.
$$bx = Cos. bDx = \frac{b}{x}$$
, Sin. $bx = \frac{V(x^a - b^a)}{x}$,

Cos.
$$Cx = Cos. CDx = \frac{c}{x}$$
, Sin. $Cx = \frac{V(x^2 - o^2)}{x}$,

Cos. Ca = Cos. β_f Cos. Gb = Cos. α_f Cos. short = Cos. γ_f

5 Werben die Werthe aus 4 in ben Gleichungen in 3. fubftituire, fo erhalt man,

Cos.
$$Cxa = \frac{x^{n} \cdot Cos_{1}\beta - ac_{1}\beta}{\sqrt{x^{n} + ca^{n}} \cdot (x^{n} - c^{n})}$$

Cos.
$$a \times b = \frac{i \partial x^2 \text{ Coslip} + ab}{V(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}$$

6) Da Cxa + Cxb + axb = 360°; alfo Cxa + Oxb = 560° - axb, Cos. (Cxa+ Cxb) = Cos. axb, und bar ber, wie ben einer ahnticen Gleichung, in x § 55 gezeigt worden,

1.
$$+$$
 2 Cos. Cxa Cos. Cxb Cos. axb $=$ (Cos. Cxa)² + (Cos. Cxb)² + (Cos. axb)².

Werden hierin für Cos. Oxa; Cos. Cxb, Cos. axb, ih; re Werthe aus 6 substituirt, und wird hierauf alles mit $(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - g^2)$ multiplicirt, so erhalt man die Gleichung,

$$(x^2 - a^2) (x^2 - b^2) (x^2 - c^2) +$$
2 $(x^2 \cos \alpha - bc) (x^2 \cos \beta - ac) (x^2 \cos \beta - ab) =$
 $(x^2 \cos \alpha - bc)^2 (x^2 - a^2) + (x^2 \cos \beta - ac)^2 (x^2 - b^2)$
 $+ (x^2 \cos \beta - ac)^2 (x^2 - c^2).$

7) Diese Gleichung reductrt sich, wenn man das, was fich aufhebt, wegläße, und hernach durch ne dividirt, auf eine reine quadratische Gleichung, und giebt, wenn noch überdies 1. Sin. a2, Sin. 32, Sin. 32, für 1 — Cos. a3, 1 — Cos. 32, 2 — Cos. 32 gesett wird, x

$$\begin{bmatrix} a^2 \sin \alpha^2 + b^2 \sin \beta^2 + e^2 \sin \gamma^2 - 2ab(Cos \gamma - Cos \alpha Cos \beta) \\ - 2ac(Cos \beta - Cos \alpha Cos \gamma) - 2bc(Cos \alpha - Cos \beta Cos \gamma) \end{bmatrix}$$

$$1 - (Cos \alpha^2 + Cos \gamma^2 + Cos \gamma^2) + 2 Cos \alpha Cos \beta Cos \gamma$$

Buf. Sind die Bintel an der Spige einander gleich, fo hat man a = 3 = p, und der gefundene Ausbruck verwandelt fich in den folgenden:

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2) \sin^2 \alpha^2 - (2ab + 2sc) + b \cdot b) (\cos \alpha - \cos \alpha^2)}{1 - 3 \cos \alpha^2 + 2 \cos \alpha^2}$$

Wenne man hierin in Cos. an für Ring an fest; und hierauf ben Ichter: und Renner des unter dem Burgelzeichen befindlichen Bruches durch i Cos. a dividirt, fo erhalt man,

$$x = V \frac{(a^{2} + b^{2} + c^{2})(1 + \cos \alpha) - (2ab + 2ac + 2bc) \cos \alpha}{1 + \cos \alpha - 2 \cos \alpha^{2}}$$

Ift noch überdies a = b = c, jo ift

$$x = a V \frac{3 - 3 \cos \alpha}{1 + \cos \alpha - 2 \cos \alpha} = a V \frac{3 - 5 \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + 2 \cos \alpha)^{\alpha}}$$

Für a = 60° ift x = a V &; die Byramide ift alsband ein regulares Cetrueber, beffen Rante = 2 a ift.

Aufg. In einer gleichfeitigen Pyramite, welche ein regulates Vieled jur Gruntoffathe, und baber fauter gleis the Slachenwinfel an der Spine bat, ift die Grofe vines solchen Winfels gegeben: man foll daraus die übrigen Winfel des Korpers finden.

Aufl. AB, BC, (Rig. 45) mögen zwen Seiten der res gularen Grundfidche, und M der Mittelpunkt diese Bieled's fenn; L sen die Spige der Pyramide, also LM ihre Hohe und LA = LB = LC, ihre Seitenlinien. Der Borausselp zung zusolge, ift ALB = BLC als einer von den Flachenwinskeln, welche die Spige L gemeinschaftlich haben, gegeben; er ien = \mu. Aus diesem laffen sich nun alle übrige Winkel bestimmett, und zwar wie folgt.

- 1) In den gleichschenkeligen Drepeden, welche die Sritens flachen der Brramide ausmachen, findet man jeden Bintel an ber Grundflache = 90° 1 \(\mu_e \).
 - 2) In ber Grundfidde felbft findet mant, wenn n bie Ans

jahl der Geiten des Bieled's Bezeichnet, jeden Polingonwintel, wie $ABC = \frac{(n-2) \, 180^{\circ}}{n}$; also $ABM = CBM = \frac{(n-2) \, 90^{\circ}}{100^{\circ}}$

3) In dem sphaksischen Orenecke als ift also al = $lo = \frac{(n-2) \cdot 186^{\circ}}{n}$, am = $lo = \frac{(n-2) \cdot 96^{\circ}}{n}$.

Biebet man alfo ben Bogen Im, fo halbirt berfelbe beit Bins tel alo und fteber gugleich auf ac perpenditular.

- 4) Der Binkel ala ift der Reigungewinkel der Ebenen LBA, LBC, also auch der Reigungewinkel jeder zwen-ander ren Seitenfidden der Ppramide, und der Binkel lac der Reigungewinkel der Ebene LBA, also auch jeder anderen Seivienfidde, gegen die Grundfiche; den ersten sese man = 1, hen zwenten = p.
- 5) Ju dem rechtwinkeligen spharischen Brenede aml ift nun, Cos. lam = Tang. am. Cor. al,

 $Sin, alm = \frac{Sin, am}{Sin, al}$

der,

Cos. $\varphi = \text{Tang. } \frac{1}{2} \text{ in } \text{Tang. } \frac{(n-2) \ go^{\bullet}}{n}$

unb

Sin. (n - 2) 90°

n

Cos. 14

6) Man hat also o und e, und somit alle Wintel der Pyramite.

VIII. Regulare Rorper.

f 111:

Ein tegularer Rorper ift ein Polyeber, welches lauter res galare, gleiche und abnliche Grangflachen bat, 'ifte beffen the, perliche Wintel von gleich vielen ebenen Winteln eingefchiefe fen werben,

Die Gransflächen eines regularen Körpers können baber nur gleichseitige Orepecke, oder Quabrate, oder regulare Funfsecke febn; die körperkichen Pintel beffelben nur von bren, ober von vier, oder von funf ebenen Wintel eingeschlossen werden. Mehr als funf Beiten können die Granistächen eines solchen Körpers nicht haben) weit sont jeder Flachenwintel 1200 doer größer als two wate, und ein körperlichen Wintel wentsteins den ebene ekfordere; auch kann kein körperlichen Wintel verfichen beine beine ekfordere; auch kann kein körperlichen wintel beffelben fechs, oder mehr uts sech Flächen wintel batten, weil sont leder viester Wintel kleiner als Goofen mither

§ 112.

Die Bestimmung der Grangstächen eines regularen Körpers hängt voll der Angabl und der Größe ihrer Seiten ab jene ser in, diese xi folglich der Unitang einer jeden Grangsstäde = nx. Um jedes regulare Weledt läst sich ferner ein Krets beschreiben; der Haldmesser dieses Kieises sein bernet ein krets beschreiben; der Haldmesser dieses Kieises sein bei ber bei berabgetaffen wird = V (y² - 1 x²), und folglich der Inhalt eines jeden folgen Bilteites! \(\frac{1}{2}\) und \(\frac{1}{2}\)

Es fen fernier ber Balbmeffer ber Ruget, Welche um bas Polpeber beschrieben werden kann, = : Ein Perpenbitel, welches aus bem Mittelpunte ber Tugel auf eine ber Grang. flachen berabgelassen wird, ift elehaun = V (r. y.). Wenn man den dritten Theil dieses Perpendikels mit dem Inhalt einer Grankstade, und hierguf mit der Anzahl der Grankstade, den multiplicitt, so erhälbeman den Lubischen Inhalt: des Bostpaders. Erst man also die Anzahl der Grankstaden = N, und den Flächeninhalt einen, jeden derselben = F, so ift der Inhalt des Polyeders = INF V (r. y.).

4-12 A 3-20 13 ---

Denn man fic durch den Piltelpunkt der Angel, nach der Geffen der das Polygeber, begrausenden Flachen, Bos den größer Regile Belegt denkt. so minischet für jedes Bielest den geich pielen Geiten auf der Dberfliche der Rugel. Das Rep, welches man auf diese Art. für die Augelfläche erhalt, bestehet aus jeden iff wielen spatischen Diele Augelfläche erhalt, bestehet aus jeden iff wielen spatischen Diele Rugelfläche erhalt, bestehet Graufflichen bat- Bebalt den Bielecken, als das Bulneder Graufflichen bat- Bebalt deninge der Buchkah N. die im wortzen hate beseichnet, der Alabeninhalt eines solchen ind

rifchen Bieledes = S.

is itm jeden Winkel = 3600. Wird dager jeder Winaller spharischen Winkel = 3600. Wird dager jeder Winkel eines ragularen Palpedere uon drev ebenen Winkeln einger
ichlossen, ip ist seder spharische Winkel = 1290; für vier
ebene Winkel ift er = 900; für stünf seene Winkel ift er

720. Von mehr als fünf ebenen Winkeln sonn der tor
perliche nicht einaeschlossen senn Winkeln son der tor

Aus biefen worldufigen Betrachtungen ergeben fich jun bie folgenben neinige möglichen regularen Rorper.

"14 Bet Beinet, marge non presegietu Greuntigepen"

und - seber körperliche Winkel von drey ebenen Winkels eingeschlossen. Da hier seber körperliche Minfel von drey ebenen eingeschlossen wird, so ift seber sphaktsche Winkel bes Beges = 120° (§ 125). Die Summe aller dren Winkel des, einer seben Granzsiache des Polyeders korrespondivenden sphaktischen Drevedes, ist beimnach = 360°, folgtich der Aldceine halt desselben = $\frac{360^{\circ}-180^{\circ}}{720^{\circ}}$ 5 (§ 59) = $\frac{5}{4}$. Da aber auch

biefet Inhalt = $\frac{s}{N}$ (§ 113), so ift N = 4. Der Körper hat bemnach vier Graustächen, und wird daher ein reguldres Eertrge der genannt. Die Anzahl seiner ebenen Wirkel ift = 14, und da immen dreh eine körperliche Ede bilden, so ift die Anzahl aller Eden dieses Körpers = 4

II. Der Körper werde von drevedigen Granzstaden, und jeder körperliche Winkel von vier ebenen Winkeln kingeschlossen. Her ist jeder spharische Winkel = 90°; folge lich die Summe aller drep Winkel eines jeden der Granzsia die korrespondirenden spharischen Drepedes = 270°. Heraus, sindet man den Adcheninhalt des spharischen Orenedes = $\frac{270^{\circ}}{180^{\circ}}$ = $\frac{3}{8}$. Da nun auch dieser Flaceninhalt

 $\frac{8}{N}$; so if N=8. Der Körper wird daber ein regulares Ofcaeder genannt; die Anjahl der ebenen Winkel auf der Oberfische deffelben ift = 24, und da jede vier eine Ede bill ben, so ift die Anjahl seiner Eden = 6.

III. Der Körrer werde von dreyeckigen Grangstächen, und jeder körperliche Winkel von fünf ebenen Winkeln eingeschlossen. Hier ift jeder spharische Binkel = 72° (h 113); folglich die Summe aller Winkel des spharischen Geometrie II.

Dreijectes = $\frac{216^{\circ}}{7^{20^{\circ}}}$ Deinnach ift ber Inhalt des sphalisten Dreijecte = $\frac{216^{\circ}-180^{\circ}}{7^{20^{\circ}}}$ S = $\frac{8}{20}$; und da dieser Inhalt auch = $\frac{8}{N}$, so ift N = 20. Der Körper wird daher ein reguldones It of aeder genannt. Auf der Obersiche desselben besinden sich ber sich ber schot bei sich ber Körper 12 Ecken haben.

IV. Det Körper werde von vierectigen Granzstächen, und jeder körperliche Winkel von drey ebenen Winkeln eingeschlossen. Hier ist wieder jeder Winkelpunkt des Reges von drey sphakischen Winkeln umgeben, und daber jeder det, setben = 120°. Die Summe aller vier Winkel eines jeden sphakischen Viereckes auf der Augelstäche ist = 480°: folge lich der Flächeninhalt desselben = $\frac{480^\circ - 360^\circ}{720^\circ}$ S = $\frac{8}{6}$; und da derselbe auch = $\frac{8}{N}$, so ist N = 6. Der Körper wird demnach von sechs Flächen eingeschlossen, weihalb er auch ein Hexaeder genannt wird; gebräuchlicher ist der Name Exdus. Auf seiner Oberstäche besinden sich 24 ebene Winkel, und da sebe Ede von drey derselben gebilder wird, so hat der Körper 8 Eden.

Vi Der Borper werde von fünsedigen Grangflachen, und jeder körperliche Winkel von drey ebenen Winkeln vingeschlossen. Jeder Kintelpunkt bes Neges ift von drey spharischen Winkeln umgeben, also jeder bersetben = 120° bemnach die Summe aller Winkel bes spharischen, dem ger kablinigen korrespondirenden Kuntelbes, = 600° Der Inthalt dieses Bieledes ift demnach = $\frac{600^{\circ}-540^{\circ}}{720^{\circ}}$ 8 = $\frac{5}{12}$

= 3, und daber N = 12. Der Korper wird alfo pon 12 Flacen begrangt, und beift daber ein regulares Dobetaes ber. Auf der Oberflace beffelben befinden fic 6o ebene Bin, tel, beren bren eine Ede bilben, er hat alfo 20 Eden.

¶ 115.

Aufg. Aus dem bekannten Salbmeffer ber um einem Cetraeber beschriebenen Augel, die Banten biefes Bordpers, seinen kubischen Inhalt, seine Berfläche, die Größe einer jeden Grangfläche, und ben Salbmeffer des um ihr beschriebenen Breifes zu finden.

Anfl. 2) Dein Estraeder korrespondirt auf der umschriebenen Augetsiche, beren halbmeffer = r, ein Neg von gleich, setigen, d. h. reguldren sphartichen Drepeden, und jeder Binkel eines solchen Drepedes ift = 120°.

2) In \$ 57 murbe gezeigt, wie man ans bem bekannten Bologonwinkel e eines reguldren spharischen Bieledes, die Geite 4, und den Bogenabstand w eines jeden Binkelpunktes vom Pole des dem Bielede umschtriebenen Kreifes finden tone. Die Anwendung auf den vorliegenden Fall giebt n = 3, 1 = 120°3 man hat also aus 6 in \$ 57,

Cos.
$$\frac{1}{2}\eta = \frac{\cos \frac{180^6}{n}}{\sin \frac{1}{2}} = \frac{\cos \frac{60^6}{60^6}}{\sin \frac{60^6}{60^6}}$$

Es ift aber, wie bekannt, Cos. 60° = ½, also Sin. 60° = ½ V 3; man hat bemnach Cos. ½ n = ½; folglich Cos. q = 2 Cos. ½ n² - 1 = - ½. Hieraus ergiebt fich, daß die Seite des sphärischen Orenedes größer als 90° ff., und zwar

um einen Bogen, beffen Ginus = f. Diefe Geite ift beim nach = 1096 28'.

3) Es sey x die Sehne dieses Bogens, oder die Kante des Letraeders; alsbann ift x = 2 r Sin & n, oder, da Sin. & n = V (1 + Cos. & n²) = V ?,

 $\mathbf{x} = 2 \, \mathbf{r} \, \mathcal{V} \, \mathbf{\hat{z}}.$

4) Nach \$ 57 ift ferner ber Wintel' am Pole, ober a = 360°; alfo hier w = 120°, und daber,

$$\sin \varphi = \frac{\sin \frac{1}{2} \pi}{\sin \frac{1}{2} \pi} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2} \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

5) Laft man nun aus bem Mittelpunkte ber Auget auf eine Drenecksfidde des Betraeders ein Porpendikel fallen, so triffe duffelbe ben Mittelpunkt des um ihm beschriebenen Rreisfes, und seine Berlangerung den hot des korrespondirenden sphakischen Dreneckes; man hat daher, wenn y den halbmefe Rreites Beneichnete

$$\dot{y} = r \sin, \dot{\phi} = \frac{2r \sqrt{2}}{3}$$

6) Aus den für wund y gefundenen Worthen findet man ferner $V(y^2 \mapsto x^2) = \frac{xV^2}{3}$, $V(x^2 - y^2) = \frac{x}{3}$, folglich aus § 112,

$$F = \frac{1}{2} nx V(y^2 - \frac{1}{2}x^2) = \frac{2 r^2}{V3}$$

und daher der kubische Juhalt des Körpers = {NFV(x2 - y2)

 $\frac{3}{9V3}$

7) Aus 3, 6, 6, ergeben fic nun bie folgenden Res

. It Rante Des Letraedets = 2 x 7 2 = 1,639995 . r.

II. Inhalt einer jeben Granfidde = 2 27 = 1/154701.1°.

III. Halbmeffer des umschriebenen Kpeises = 2 r 1/2 = 5

0/942809 . r.

IV. Oberfiace des Letraeders = $\frac{8 \text{ r}^2}{\nu \text{ 5}}$ = 4,618804 . r.

V. Rubischer Inhalt deffelben = $\frac{8 \text{ r}^3}{9 \text{ k/s}} = 0.513200 \text{ , r}^3$.

\$ 116,

Aufg. Aus bem gegebenen Zalbmeffer einer Augel, bie nämlichen Stude, als in der Aufgabe § 115 fur das eingeschriebens Oftaeder zu finden.

Aufl. 1) hier ift n = 5, a = $\frac{560^{\circ}}{n}$ = 180°, f =

 $\frac{360^{\circ}}{4} = 90^{\circ}; \text{ also (§ 57)}$

 $Cos, \frac{1}{4} = \frac{Cos, \frac{180^{\circ}}{n}}{Sin, \frac{1}{40^{\circ}}} = \frac{Cos, 60^{\circ}}{Sin, 45^{\circ}};$

sder, da Cos. 60° = 1, Sin. 45° = Cos. 45° = 1 1/ s,

Cos. $\frac{1}{2}\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{1}{2} \eta$.

2) hieraus ergiebt fic,

x == 2 r Sin, I n == r 1/2.

5) Auch iff,

 $\sin \varphi = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \alpha} = \frac{1 : V^2}{\frac{1}{2} V^3} = V^{\frac{2}{3}}$

alfo,

y = r Sin v = rV

4 Demnach ift

$$V(y^2 - \frac{1}{4}x^2) = \frac{r}{V^6}, V(r^2 - y^2) = \frac{r}{V_3}$$

5) Aus allem Diefen ergeben fich nun die folgenden Be-

I. Rante des Oftaebers = r V 2 = 1,414214 . r.

II. Inhalt einer jeden Granflache = $\frac{r^2 V_3}{2}$ = 0,866025. r^2 .

III. Salbmeffet bes umfdriebenen Rreifes = r V 3 = 0,816496 . r.

IV. Oberfläche bes Oltaebers = 4 rº 1/3 = 6,928203 . r.

V. Rubifder Inhalt beffelben = $\frac{4 r^3}{3}$ = 1,333333 . r^3 .

\$ 117.

Aufg. Aus bem gegebenen Salbmeffer einer Augel, die nämlichen Stude, als in der Aufgabe \$ 115 fur das Ikosaver zu finden.

Aufl. 1) Für das Itofaeder ift
$$n = 3$$
, $\alpha = \frac{360^{\circ}}{n} =$

120°,
$$\ell = \frac{3609}{5} = 72°$$
; also (§ 57)

$$Cos, 17 = \frac{Cos, \frac{180^{\circ}}{n}}{Sin, 10} = \frac{Cos, 60^{\circ}}{Sin, 36^{\circ}}$$

Der Sinus von 36° ift die Halfte der Seite des Fänfedes für einen Kreis, beffen Halbmeffer = 1, also = $\frac{V(10-2V5)}{4}$; Ruch ift Cos. 60° = 1; man hat daher

Cos.
$$\frac{1}{4} = \frac{2}{V(10-2V5)} = \frac{V(5+V5)}{V^{10}}$$

$$\sin \frac{1}{4} = \frac{V(5 - V5)}{(3/10)}$$

hierans ergiebt fic,

$$x = \text{sr Sin.} \quad \eta = \frac{\text{sr}V(5-V5)}{V_{10}} = \frac{\text{r}V(10-2V5)}{V_5}$$

3) gerner ift (\$ 57),

Sin.
$$\varphi = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \alpha}$$
, oder, da Sin. $\frac{1}{2} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\sin \alpha = \frac{V(10 - 2V5)}{2};$$

 $\sin \varphi = \frac{V(10 - 2V5)}{V!5};$

folglith

$$y = r \sin \varphi = \frac{r V (10 - 2 V 5)}{V 15}$$

4) Hieraus ergiebt fich,
$$V(y^2-1x^2)=\frac{xV(5-V5)}{V30}$$

$$V(r^2-y^2) = \frac{r V(5.42V5)}{V.15}$$

$$F = \frac{1}{2} m V (y^2 - \frac{1}{2} x^2) = \frac{3 x^2 V (6 - 2 V 5)}{3 V 15} =$$

$$\frac{3 r^{2} (\sqrt{5-1})}{2 \sqrt{15}} = \frac{3 r^{2} (5-\sqrt{5})}{10 \sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{2} \text{ NF } V(r^2 - y^2) = \frac{2 r^3 V(10 + 2 V 5)}{5}$$

5) Man bat alfo für das Itofaeber Die folgenden Beftims mungen :

I. Rante des Itosaeders = $\frac{rV(10-2V.5)}{V.5} = 1,051462.r^2$

II. Inbalt einer jeben Gransfidde = $\frac{3 r^4 (5 - V s)}{10 V s}$

III. Salbmeffer des umfdriebenen Rreifes = 1/(10-2/5)

⇒ 0,607062 . r.

IV. Oberfidde bes Itosaebers = $\frac{6 x^2 (5 - V 5)}{V 3}$

V. Anblicher Inhalt besselben = $\frac{2 r^2 V(10 + 2V 5)}{5}$

Anmert. Zur leichtern Berechnung ber hier vorkoms menden Irrationalgrößen dienet der Umftand, daß V(10-21/6) = 4Sin. 36°, V(10+21/5) = 4Cos. 18°, und 5-1/5 = 4V5. Sin. 18°.

§ 118,

Aufn. Aus bem gegebenen Salbmeffer einer Augel Die namlichen Seuche als in der Aufgabe § 115 fur bas eingeschriebene Sergeber, ober ben Aubus In finden.

Auft. 1) Für bas Heraeber ift n = 4, a = $\frac{360^{\circ}}{n}$

90°, \$ = \frac{360°}{3} == 120°; affo (\$ 57),

Cos. $\frac{1}{4}\eta = \frac{\text{Cos. } \frac{180\%}{n}}{\text{Sim. } \frac{45^{\circ}}{60\%}} = V_{\frac{3}{2}}$

well Cos. $45^\circ = \frac{1}{V^2}$, und \sin . $60^\circ = \frac{V_5}{2}$; also

Sin. in = V i

9) hieraus erhalt man, .

$$x = 2r \sin \frac{1}{2} \eta = \frac{2r}{V_3}$$

S Ferner ift,

Sin.
$$\psi = \frac{\sin \cdot \frac{1}{2} \eta}{\sin \cdot \frac{1}{2} \alpha} \neq V$$

und baher,

$$y = r \sin \varphi = \frac{r V s}{V s}$$

 $\frac{1}{3}$ NF $\frac{1}{3}$ (r² - y²) = $\frac{8 \text{ r}^3}{5 \sqrt{5}}$

5) Dan bat alfo für das herneber die folgenden Beftime mungen:

I. Rante des hergebers $=\frac{2r}{V3}=1,154700$. 2.

II. Inhalt der Gransfidde = $\frac{4 r^2}{3}$ = 1/333333 , 28,

III. Halbmeffer des umschriebenen Kreises = $\frac{x V_2}{V_3}$ = 5,816496.

IV. Pherflache des Bergebers = 8 ra = 8,000000 , ra

V. Rubifcher Inhalt beffetben = $\frac{8 r^2}{5 \sqrt{3}}$ = 1,539600 . r.

Aufgi Aus dem gegebenen Sathmeffer einer Appel, Die namlichen Stude, als in der Aufgabe § 215 fur das Dobefaeber zu finden.

Aufl. 1) Für das Popelgeber if n = 5, $\alpha = \frac{300^n}{n}$

Da nun Sin. 36° als die Salfte der Geite des Fanfedes in einem Rreife, deffen Salbmeffer Die Einheit ift, $=\frac{V(10-2V5)}{4}$;

fo ift Cos. $36^{\circ} = \frac{V(6+2V5)}{4} = \frac{V5+1}{4}$; und daber

Cos.
$$\frac{1}{4}\eta = \frac{V5+1}{2V3}$$
, Sin. $\frac{1}{4}\eta = \frac{V(3-V5)}{V6}$

2) Hierque ethált man $x = 2 \hat{r} \sin \frac{1}{4} \pi = \frac{rV(6 - xV_5)}{V_5} = \frac{\hat{r}(V_5 - 1)}{V_5}$

5) Ferner iff,

$$\sin \phi = \frac{\sin \frac{1}{2} \pi}{8 \text{im} \frac{1}{2} \alpha} = \frac{4V(3-V5)}{V^6 \cdot V(10-2V5)} = \frac{V(19-2V5)}{V^{15}}$$

$$y = r \sin \phi = \frac{r V(10-2 V 5)}{V \cdot 15}$$

4) Soight
$$V(y^2 - 1x^2) = \frac{rV(10 + 2V5)}{2V15}$$

$$V(\mathbf{r}^s - \mathbf{y}^s) = \frac{\mathbf{r} V (6 + \mathbf{s} V 5)}{V 15}$$

$$\frac{1}{4}$$
NF $V(r^2-y^2) = \frac{2 r^3 (5 + V_5)}{3 V 3}$

5) Mus allem biefen erhalt man batter,

II. Inhalt einer jeden Grönzfiache = r2.
$$\frac{V.5}{6}$$
 (10 — 2 $V.5$) = 0,876218. r3.

III. Halbmeffer des umschriebenen Kreifes =
$$\frac{rV(10-2V_5)}{V^{16}}$$
 = 0,607062 . r.

IV. Oberfidde des Dobelgebers = 2x2 V 5. V (10-2V 5) = 10,514616.x2.

V. Kubischer Inhalt besselben = $\frac{2 r^3 (5 + V 5)}{3V 5}$ = 2,785164. r^2 ,

IX. Korper, welche von regularen Figuren zwepere

€ 120

Die nachste Stelle nach ben reguldren Körpern verdient biefenige sehr gablreiche Rlaffe von Körpern, welche zwar, so wie jene, gleiche und ähnliche körperliche Winkel haben, und von lauter reguldren Figuren begranzt werden, aber doch darin von ihnen abweichen, daß diese Figuren nicht alle von einerlen Art find; wie 8. B. wenn ein Körper zugleich von Quadraten und gleichseinigen Dreneden, oder zugleich von regwisten Fünseden, Biereden und Breneden begranzt wird.

Ein folder Rorper ift bestimmt, wenn a) die Bigur ber Grangfidden, und 2) die Angabt ber ebenen Bintel won feber Are; welche einen torperlichen Wintel bilben, gegeben ife

Die Cfaffifikation folder Korper tann baber am füglichften nach diefen benden Sauptmertmalen gefcheben; borausgefest, baf diefe Merkmale nichts, widerfprechendes enthalten. Moglichteit oder Ummöglichteit eines Korpers fur die gegebes nen Bedingungen, muß theils aus ben allgemeinen Sagen im VIten Abichnitte, theils que ibrer Conftruttion entichieden werden. Go g. B. giebt es feinen Rorper, welcher jugleich pon Dreneden und Quadraten begrangt wird, und in welchem jebe Ede von gren Binteln eines gleichfeitigen Drenedes, jeber = 60°, und von einem Bintel eines Quabrates = 909 einges fcoffen wird; benn die Summe der ebenen Bintel an jeder Ede ift alsbann = 21 R., folglich, wenn E die Angabl ber . Eden bes Bolneders bezeichnet, Die Summe aller ebenen Bin. tel auf der Oberfläche deffelben = 21 E rechten Winteln; Dies fe Summe ift aber nach § 89 = 4 E - 8 rechten Winkeln; man hat also 4 E - 8 = 21 E, woraus man E = 42 erbalt, welches unmbglich ift.

Der Ausbrudt: gleiche und abnliche Bintel, murbe fürigens hier in bem Ginne gebrancht, wie er gewohnlich ger nommen wird; indeffen macht der zu behandelnde Gegenfignd boch eine etwige nabere Befimmung beffelben nethig.

J 121.

Man denke fich zwen körperliche Winkel X, X', deren einer X durch die abenen Winkel a, b, c, d, . . . x, y, z, der andere durch eine gleiche Angahl ebener Winkel a', b', c', d', x', y', z', eingeschlossen werde, und in welcher die Ords nung dieser Winkel gerade so ist, wie sie die Folge der Buchs. staden angliebe. Ik nun a' = a, b' = b, c' = o, d' = d, . . . x' = x, y' = y, x' = z, und sind die Reigungswins kel upn jeden zwen gleichen, an einander gränzenden Flächenswinglich für X und X' dieselben, so sollen diese körperlichen Wing

tel gleich und abnlich, ober auch ichlechtbin gleich genannt werden, und zwar beshalb, weil fie; wie zwen gleiche und dhnliche ebene Siguren völlig zufammen fallen, wenn fie auf einander gelagt werden.

Man versaufde nun in bem forperlichen Bintel X', z' mit a', y' mit.b', w' mit c', u. f. w., fo daß die ebenen Bintel. wenn fie in der namlichen Richtung gezählt werden als vore . ber, die umgefehrte Dednung zi, yi, xi, di, oi, bi, ai, erbalten; laffe aber jugleich bie Reigungswintel ber Chenen ebenfalls in umgelehrter Ordnung folgen, fo daß febe amen Rlachenwinkel & B. b', c', ihre Reigung unverandert behalten, und benfelben Bintel einschließen als vorber. Dierburch ents Arbet ein torperlicher Bintel X", ber gwar, in Sinfict auf bie Große, Reigung, und folge ber Glachenwinfel, von dem torperliden Bintel X nicht verschieden ift, und ibm baber in fofern får gleich geachtet werben tann; aber boch von ber Mrt ift, daß swifden ibm und bem Bintel X ichtectebings feine Congruens fatt findet. Solde gwen torperliche Bintel nun, wie X und X", follen gleich' und fymmetrifd, ober foledthin in mmeteifd genannt werden.

Der Unterschied swifchen den gleichen und symmetrischen Binteln befiebet alfo bieß darin, daß ben jenen eine Congrenn, ben biefen teine möglich ift.

Ben ben Körpern, mit benen wir es jest zu thun haben werden, wird teine durchgangige absolute Gleichheit der körperslichen Winkel gefordert, denn eine solche ift nur ben den regus, laren Körpern möglich, in welchen alle ebenen Winkel einander gleich find, sondern bloß entweder absolute, oder sommer trifche Gleichheit. Das aber auch selbst die Gleichheit der togeperlichen Winkel in diesem eingeschrankleren Sinne genommen, wegen der Natur der Grangstächen, und der Bedingungen für

die torperlichen Wintel, oft nicht zu erhalten indglich ift; wer, ben die folgenden Anfgaben zeigen.

S 122.

Aufg. Man soll die Bedingungen augeben; umer welchen es möglich ift, an den Umfang eines gegebenen Dielectes, anvere regulare Vielecte so ausufenen, das dard durch an den Winkelpunkten jener Figur lauter gleiche oder swimperische körperliche Winkel entstehen.

Aufl. i) Man bente fich irgend ein reguldres Bieled; die Angahl feiner Seiten fer = r; es heiße, der Kutze wegen, ein rect.' Die Spisen dieses Bieled's follen nach der Ordnung; wie fie auf einander folgen, durch A', A'', A''', Air,

A(r) bezeichnet und A' für die erfte genommen werden; also dann ist A'A'', A''A''', A''A''', A''A'''...... A(r)A', die erste zwente, dritte, rte Seite.

- 2) Die Spitze A" sen, nun angleich bie Spitz gwener and bereit Bielede, eines meds und eines nede, beten eines wer nigftens won bem red verschieben ift. Das ined habe bie Seite A'A", bas ned bie Seite A'A" init seinem gemeinschaftlich.
- 3) Da jebes von den benden angeseten Bieteden mit dem red eine Seite gemeinschaftlich hat, so hat auch jedes der bew den erfleten Bielede mit dem letteren zwen Spiten gemeinsschaftlich; und zwar das ined die Spiten A', A'', und das neit die Spiten A', A'',
- 4) Sollen baber um bem Puntte A" bie nantichen Bintel liegen, als um bem Puntte A", fo muß man aber bie britte Seite A"A" bes recks ein med fegen, und dus einem ihnlichen Grunde über die vierte Seite A"A" ein nied', über die fünfte Seite A"A" ein med u. f. w. immer wechfetsweife ein nied und ein ned.
 - 3) Dieraus lagt fich foliegen, bag bie mede nur auf bie

rke, 3te, 6te, 7te u. f. w. Seise bes nede, allo auf biefenigen Seiten, welche die ungeraden Stellen in der Fotge derfels ben einnehmen, und die nede nur auf die ate, 4te, 6te, 8te, u. f. m. Seite, atfo auf diesenigen Seiten, welche die gerarden Stellen in dieser Fotge einstehmen, zu fteben kommen werden.

- 6) If daber x sine gende Infl. so kommt auf die legte Seite des recks, namich ACDA', ein neck auchehen, und der Punkt A' ift die Winkelfpige von den drep Winkelf vie recks, der med's und des necks. Ift aber x ungerade, so kommt auf die Geite ACDA' ein merk zu Achen, und der Punkt alle wied die gemeinschaftliche Spige. desper Winkel, deron einer aus dem reck, und zwen dus dem meck genommen find; welches der Bornoseguig, duf alle körherliche Winkel gerich, oder sommerrisch fein sollen, widerspriche
- 7) Es kum alfo ber Fotbering nur Alebanit eine Gunige gefcheben, wenn a gerabet nicht aber, wenn a ungerqbe ift. Bur Erafiterung bes Gefaften bienet gigt 46 und gigt 47: die erftere von Siegten Biguren neigt nin Achted, init angefesten Drepeden und Wiereden, welche man fich gehörig gufammen gefigt verftellen muß; die zwente zeigt daffelbe fur ein Reune ed; in der eiften ift die Conftinttion möglich, bit der greeten inmoglich.
- 8) Stellt man fic numnehr vor, es water zwischen fedem med und ned ein anderes Rieled, ein poet eingeschoben, so daß für den Puntt A' zwei Seiten dieses legteren, mit einen Seiten ber bevohn ersteren, A'k und A'k' gulaimmen falleit, und jede Spige des recks zugleich eine Spige eines wecks, eines wecks und eines pecks wird, so andert dieses in den bisterigen Schlussen nichts, und die Construction bleibt möglich, wenn r gerade, unmöglich, wenn r gerade, unmöglich, wenn r gerade, unmöglich, wenn r ungerade ist.

II. Inbalt einer jeben Grangfiche = 3 ra (5 - V sb. 19 V 3

III. Halbmeffer des umfdriebenen Rreffes = 1/(10-2/5)

⇒ 0,607062 . x.

IV. Oberfische des Fosgebers $=\frac{6 \, x^2 \, (5 - V \, 5)}{V \, 3}$

V. Anbischer Inhalt besselben = $\frac{2 r^4 V(10 + 2 V 5)}{5}$

Anmert. Fur teichtern Berechnung der hier portome menden Irrationalgrößen dienet der Umftand, daß V(10-21/5) = 4Sin. 36°, V(10+21/5) = 4Cos. 18°, und 5-V5 = 4V5. Sin. 18°,

5 118,

Aufn. Aus bem gegebenen Salbmeffer einer Angel bie namlichen Sender als in der Aufgabe § 115 für bas eingeschriebene Sergeber, ober ben Aubus 311 finden.

Auft, 1) For bas hernebes ift n = 4, a = 3600

90°, (= 360° = 120°; affo (§ 57),

Cos. $\frac{1}{4}\eta = \frac{\text{Cos. } \frac{180\%}{n}}{\text{Sip. } \frac{1}{4}} = \frac{\text{Cos. } 45^{\circ}}{\text{Spn. } 60\%} = V^{\frac{9}{3}}$

well Gos. $45^{\circ} = \frac{1}{V^2}$, und 8in. $60^{\circ} = \frac{V}{2}$; also

Sin in = VI

9) Steraus erhalt man,

$$= 2r \sin \frac{1}{2} \eta = \frac{2r}{V \cdot 5}$$

D Ferner ift,

Sin,
$$\psi = \frac{\sin \sqrt{1 \eta}}{\sin \sqrt{1 \eta}} = V$$

und baber,

$$y = r \sin \varphi = \frac{r \nu_2}{\nu_3}$$

 $\frac{1}{2} \text{ NF } \mathcal{N} \left(r^a - y^a \right) = \frac{8 r^3}{5 \mathcal{N}^5}$ 5) Was hat also für das Oxnebe

5) Man hat atfo für das hexneder die folgenden Beftinge mungen:

I. Rante des hergebers = 2 = 1,154700 . E.

II. Inhalt der Gransfläche = $\frac{4 r^4}{3}$ = 1/333333 , x3,

III. Halbmeffer bes umschriebenen Kreises = $\frac{x V_2}{V_3}$ = $\tilde{o}_{,816496}$.

IV. Pberfläche bes Bergebers = 8 rs = 8,0000000 . rs.

V. Rubischer Inhalt deffetben = $\frac{8 r^2}{5 \cdot 1/3} = 1,539600 \cdot r^2$.

Aufg. Aus bem gegebenen Sathmeffer einer Angela die nämlichen Stucke, ale in der Aufgabe § 215 für das Dodekaeber zu finden.

Podetaeder zu inden.

Aufl. 1) Für das Podetseder if n = 5, $\alpha = \frac{360^8}{n}$

Cos.
$$\frac{1}{4}\eta = \frac{\text{Cos. } \frac{180^{\circ}}{\text{cos. } 36^{\circ}}}{\text{Sin. } 4a} = \frac{\text{Cos. } 36^{\circ}}{\text{Sin. } 60^{\circ}}$$

Da nun Sin 36° als die Salfie der Seite des Fanfectes in einem Rreife, deffen Salbmeffer bie Einheit ift, $=\frac{V(10-2V5)}{4}$;

fo if Cos.
$$36^{\circ} = \frac{V(6+2V5)}{4} = \frac{V(5+1)}{4}$$
; und daher Cos. $\frac{1}{4}\eta = \frac{V(5+1)}{2V3}$, Sin. $\frac{1}{4}\eta = \frac{V(3-V5)}{V6}$

2) Sierque erhalt man

$$x = 2r \sin \frac{1}{2} \pi = \frac{rV(6 - xV_5)}{V_3} = \frac{r(V_5 - 1)}{V_3}$$

3) Ferner if,

$$\sin \phi = \frac{\sin \frac{1}{2} \pi}{8 \sin \frac{1}{2} \alpha} = \frac{4V(3-V5)}{V^6 \cdot V(10-2V5)} = \frac{V(10-2V5)}{V^{15}}$$

und baber, .

$$y = r \sin \varphi = \frac{r \mathcal{V}(10 - 2 \mathcal{V} 5)}{\mathcal{V} \cdot 5}.$$

4) Folgith
$$V(y^2 - 1x^2) = \frac{x V(10 + 2 V5)}{2 V 15}$$
,

$$V(r^2 - y^2) = \frac{rV(5 + 2V5)}{V15}$$

 $F = \frac{1}{2} \ln V_1 (y^2 - \frac{1}{2} x^4) = r^4 \cdot \frac{V_5}{6} V_1 (19 - 2 V_5)$

$$\frac{1}{4}NFV(r^2-y^2)=\frac{2r^3(5+V_5)}{3V_3}$$

5) Mus aftem biefen erhalt man baber,

I, Rante Des Dodefaebers = r(V5-1) = 0,713644 . r.

II. Inhalt einer jeden Granzfilde = r2 .
$$\frac{V.5}{6}$$
 (10 - 2 $V.5$) = 0,876218 . r2.

III. Halbmeffer des amschriebenen Kreifes =
$$\frac{rV(10-2V5)}{V^{-16}}$$

= 0,607062 . r.

IV. Oberfläche des Dobefgebers = 2x2 V 5. V (10-2V 5) = 10,514616.x3.

V. Rubischer Inhalt besselben = \frac{2 \ v^3 \left(5 + \ V \ 5\right)}{3 \ V \ 5} = \frac{3 \ V \ 5}{3 \ V \ 5}

IX. Korper, welche von regularen Figuren zwepere fen Art begrangt werben.

§ 120.

Die nachste Stelle nach ben regularen Körpern verbient, biefenige sehr gablreiche Rlaffe von Körpern, welche zwar, so wie jene, gleiche und chnliche körperliche Winkel haben, und von lauter regularen Figuren begranzt werden, aber boch barin von ihnen abweichen, daß biese Figuren nicht alle von einerlen Art find; wie 8. B. wenn ein Körper zugleich von Quadraten und gleichseitigen Dreneden, oder zugleich von regwilden Fänfeden, Biereden und Breneden begranzt wird.

Ein folder Rorper ift bestimmt, wenn a) die Tigur ber Grangflachen, und 2) die Angabl ber ebenen Bintel von jeder Art; welche einen torperlichen Wintel bilben, gegeben ife

Die Claffifilation folder Korper tann baber am füglichften nach biefen benden Sauptmertmalen gefcheben; vorausgefest, baf diefe Mertmale nichts wiversprechendes enthalten. Die Möglichkeit oder Ummöglichkeit eines Körpers fur die gegebes nen Bedingungen, muß theils aus den allgemeinen Sagen im VIten Abichnitte, theils aus ihrer Conftruftion entichieden werben. Go g. B. giebt es feinen Rorper, welcher gugleich von Dreneden und Quadraten begrangt wird, und in welchem jebe Ede von zwen Winteln eines gleichfeitigen Drenedes, jeder = 600, und von einem Bintel eines Quadrates = 909 einges fchioffen wird; benn die Summe der ebenen Bintel an jeder Ede ift alebann = 21 R., folglich, wenn E die Angabl ber Eden bes Bolneders bezeichnet, die Summe aller ebenen Bins tel auf der Oberflache deffelben = 21 E rechten Binkeln; Dies fe Summe ift aber nach § 89 = 4 E - 8 rechten Binteln; man bat alfo 4 E - 8 = 2 E, woraus man E = 42 erbalt, meldes unmbalich ift.

Der Ausbrudt: gleiche und dheliche Bintel, wurde fibrigens hier in bem Ginne gebrancht, wie er gewohnlich ger nommen wird; indeffen macht der zu behandelnde Gegenftand boch eine etwas nabere Bestimmung besteben nothig.

§ 121.

Man denke fich zwen körperliche Winkel X, X', beren einer X durch die ebenen Winkel a, b, c, d, . . . x, y, z, der andere durch eing gleiche Anzahl ebener Winkel a', b', c', d', x', y', z', eingeschlossen werde, und in welcher die Ords wung dieser Winkel gerade so ift, wie sie die Folge der Buche staden angliebe. Ist nun a' = a, b' = b, c' = o, d' = d, . . . x' = x, y' = y, a' = z, und sind die Reigungswinz kel upn jeden zwen gleichen, an einander grenzenen Flachen-winkelt sur X und X' dieselben, so sollen diese körperlichen Winkel

tel gleich und ahnlich, ober auch folechibin gleich genannt werben, und zwar beshalb, weil fle; wie zwen gleiche und dhnliche ebene Siguren völlig gufammen fallen, wenn fle auf einander gelagt werben.

Dan vertaufde nun in bem forperlichen Bintel X', z' mit a', y' mit.b', x' mit c', u. f. w., fo daß die ebenen Bintel, wenn fie in ber namlichen Richtung gezählt werben als vore . ber, die umgekehrte Ordnung zi, yi, xi, di, ci, bi, ai, erhalten; laffe aber jugleich bie Reigungswintel ber Cbenen ebenfalls in umgetehrter Ordnung folgen, fo daß jede zwen Riddenwintel g. B. b', c', ihre Reigung unverandert behalten, und benfelben Bintel einschließen als vorber. Dierburch ents Rebet ein torperlicher Bintel X", ber gwar, in Sinfict auf Die Große, Reigung, und Rolge ber Midchenwintel, von bem torperlicen Bintel X nicht verschieden ift, und ibm baber in fofern fat gleich geachtet werben tann; aber boch von bet Mrt ift, daß gwifden ibm und bem Bintel X ichtechterbings feine Congruem flatt findet. Solde gwen torperliche Bintel num, wie X und X", fellen gleich' und fommetrifd, ober folechtbin in mmeteifd genannt werben.

Der Unterschied swifden ben gleichen und sommetrischen Binteln bestebet alfo bios darin, daß ben jenen eine Congruens, ben biefen teine möglich ift.

Ben ben Korpern, mit benen wir es jest zu thun haben werden, wird keine durchgungige absolute Gleichheit der forperslichen Binkel gefordert, denn eine solche ift nur ben den regus, ldren Korpern möglich, in welchen alle ebenen Binkel einander gleich find, sondern bloß entweder absolute, oder spynmastrische Gleichheit. Das aber auch selbst die Gleichheit der togs perlichen Winkel in diesem eingeschrankteren Sinne genommen, wegen ber Natur der Graussichen, und der Bedingungen sur

bie torpertichen Bintel, oft nicht ju erhalten moglich ift; wers ben die folgenden Aufgaben zeigen.

S 122.

Aufg. Man soll die Bedingungen angeben, umeer welchen es möglich ist, an den Umfang eines gegebenen Dieleckes, andere reguläre Vielecke so anzusenen, daß das durch an den Winkelpunkten, jener Figur tauer gleiche oder swimperische körperliche Winkel entstehen.

Aufl. 1) Man bente fich irgend ein reguldres Bieled; bie Angahl seiner Seiten ser = r; es heiße, ber Kutze wegen, ein rect. Die Spigen bieses Vieled's sollen nach der Ordnung; wie sie auf einander folgen, burch Al, All, All, All, Ar,
A(r) bezeichnet und Al für die eine genommen werden; als dann ist A/All, AllAll, AllAll., AllAll., die eine zwente, drine, re Seite.

- 2) Die Spitze A" sen, nun angleich bie Spitze gweier and beren Bielede, eines meds und eines neds, deren eines wer nigftens won bem red verschieden ift. Das ined habe die Seite A'A", das ned die Seite A'A" init seinem gemeinschaftlich.
- 3) Da jebes von den benden angesepten Reteden mit bem reit eine Seite gemeinschaftlich bat, so hat auch jedes der bepe den erfleten Bielede mit dem tetteren zwen Spitten gemeins schaftlich; und zwar das ided die Spitten A', A'', und das neit die Spitten A'', A'''.
- 4) Sollen baber um bem Puntte A" die nantichen Bim tel liegen, als um bem Puntte A", fo muß man aber die britte Seite A"AP des recks ein med fegen, und aus einem ihnlichen Grunde über die vierte Seite APAP ein nied', über die fanfte Seite APAPI ein med u. f. w. immer wechfelsweife ein med und ein ned.
 - 3) Diegaus lagt fich foliegen, bag bie mede nur auf bie

rke, 3te; 8te, 7te u. f. w. Seise bes vede, allo que biefeinigen Gekten, welche die ungeraden Crellen in der Foige deriell ben einnehmen, und die nede nur auf die ate, 4te, 6te, 8te, u. f. w. Seite, atfo auf diesenigen Seiten, welche die gerarden Stellen in dieser Foige einstehmen, zu fteben fommen werden.

- 6) Ift daher r eine ginade Jahl, fo fomint auf die lette Seite des reits, nämtich :AG)A', ein ned auckehen, und der Hunte A' ift die Bintelfpige von den dren Wintelf vie verte, der med's und des wedts. Ift aber r ungerade, so kommt auf die Seite A(x)A' ein murk zu feben, und der Pauferal wich die gemeinschaftliche Spige. dreper Windel, devon einer was dem red, und zwen aus dem med genommen find; welches der Wormertzung, dus alle körperliche Wintel gleich, oder spinnereisch feste follen, widerspricht
- 7) Es bum atfo ber gototeinig nur alebanit eine Gunige gefcheben, itenn if getabet nicht aber, wenn in ungerabe ift. Inr Erdiniviung bes Gefaften bienet giqt 46 und gigt 47: die erftere von biefen Siguren neigt ein Achted, init angelegten Drepeden und Biereden, welche man fich gehörig gufammen goffigt verftellen muß; die gwonte geigt daffelbe für ein Reunselle in der eiften ift die Conftintisch möglich, til ber giventen itumsalich.
- 8) Stellt man fic numnehr vor, es ware wischen febem med und ned ein anderes Rieled, ein ped eingeschöben, so baß für den Puntt A' zwei Seiten dieses letteren, mit swey Seiten ber bevden erfteren, A'k und A'k' zusämmen falleit, und jede Spiße des reds zugleich eine Spiße eines medt, eines neds und eines peds wird, so andert dieses in den bist herigen Schlüssen nichts, und die Confruttion bleibt möglich, wenn r gerade, unmöglich, wenn r ungerade ift.

9) Sieber wurde angenommen, bag in von i verfchiebeit fen; ift das nicht der Fall, forist die Confruktion immer mass lith, x mag gerade, oder ungerade fonn:

20) Hierans folgt über ferner, daß, wenn füt ein ungte kabes t die Conftruktion möglich fenn folk, fich unter ben aus zufegenden Bielecken nothwendig zwep gleiche befinden muffen. Bu fr: Guff daber bin Körper von regetidren Bielecken

wingeschloffen werben; sugleich über tlauter gleiche ober spite imetrische körperliche Binkel haben, und bufinder fich unter den Bieleden; melche einen solchen Binkel begränzen, eines mis winer angeralten Anzahl der Geiten, so muß es unter den übeisgem wenigstensczwen gleiche geben.

Anfg. Bin Börper mit gleichen, und symmetrischen Winkeln, wird von lauters rogularen weden und naden vingelbieffenzund war fo, das jeder könnerliche Winkel von: p glachemvinkel aus dem erften. Dieledbund glich deuwinkel aus dem erften. Dieledbund glich deuwinkel aus dem legteren gebilder wird: man foll die ingabil der Ecken des Körpern und die Inzahl der Gränzsstäden von ieder Aler bestimmen.

Aufly Es fen E die Angahl der Aden, Midie Angahl der meder und N die Angahl der werte auf der Oberfläche des Körpers.

n) Da jedes med m Wintel nuhalt; so giebt er auf bet Dberfläcke des Korpers in allem Um Bintel, welche diesem Bielede gugehören; und da jeden torperlichen Bintel p bergeihen umgrangen, so ift die Anzahl der Eten oder E wim. Durch abnliche Schluffe erhalt man E = Nn.

Wan hat also $\frac{Mm}{P} = \frac{Nn}{q}$, und baber $N = \frac{Mmq}{np}$

2) Jeber Bintel eines mede ift, wie befannt, mann 2m 4 R, und jeder Bintel aus dem ned = 2n - 4 R;

Porpers = [p. 2m-4 + 4 2n-4] E rechten Binteln.

Aber die Summe biejer Bintel ift auch = 4 E - 8 rechten Binteln (§ 89); man bat alfo die Gleichung.

$$\left[p \cdot \frac{2m-4}{m} + q \cdot \frac{2m-4}{n}\right] E = 4E - 8$$

Hofurzung, 2mn - np (m - 2) - mq (n - 2) = A gejest wird,

$$E = \frac{4 \text{ ion}}{A}$$
, $M = \frac{4 \text{ ip}}{A}$, $N = \frac{4 \text{ inq}}{A}$.

Die Werthe, welche man hieraus für E, M, N, erhält, milj sen endliche, ganze und positive Zahlen senn; wo dieses nicht sutrifit, ift der Körper unmöglich.

§ 124.

Aufg. Es sollen alle mögliche Körper gefinden wers den, welche gleiche oder symmetrische Eden bestigen, und von regulären Veleden zweverler Urt begränzt werden.

- Aufl. 1) Jeder Korper wird durch die für m, n, p, q, angenommenen gangen Rablen bestimmt; denn aus diesen fine det man (§ 123) A, und hieraus terner M, N, E. Auch ift, wenn K die Angabl der Kanten bezeichnet, K = Mm + Nn woraus fich K bestimmen lakt.
- 2) Um ben biefer Ungersuchung die geborige Ordnung au Beobachten, wollen wir querft für m und, p die fleinsten moge lichen Werthe, namlich m 3, p = 1, annehmen. Ben Beometrie EL.

diesen Werthen ift es nicht gekattet, n kleiner als 4 angipehmen, weil vorausgesetzt worden, daß jeder körperliche Winkel von Bieleden zwéverlen Art begranzt werde; auch kann q nicht kleiner als 2 senn, weil ein körperlicher Winkel wenigstens. drep Flachenwinkel haben muß, und nicht größer als 3, weil sonft die Summe aller Flachenwinkel größer als 360° ware.

3) Es fen daber guerft m = 3, p = 1, n = 4, q = 2. Substituirt man diese Werthe in ben Formeln des vorigen S's, fo erhals man, A = 8, und hieraus

E=6, M=2, N=3, K=9. Es sen amentens m=3, p=1, n=4, q=3. Hisr if A=2; folglich,

E = 24, M = 8, N = 18, K = 48.

- 4) Behatt man die Werthe m = 3, p = 2, und sett n = 5, so kann q nicht größer als I senn, weil sonft die Summe aller klachenwinkel größer als 360° ware. Roch werniger kann aus diesem Grunde q > 2 senn, wenn n > 5 ift. Wan seze daher q = 2, nnd laffe n unbestimmt; alsdann ift A = 12 n, und n kann daher nicht größer als 11 senn. Die Werthe n = 5, n = 7, n = 9, n = 11, konnen wergen § 129 nicht katt finden; die ersteren berde anch schan dess halb, weil sie katt finden; die ersteren berde anch schan dess halb, weil sie katt finden; die ersteren berde anch schan dess werthe, n = 6, n = 8, n = 19. Heraus ergtebt, sich,
- 5) Sûr m = 5, p = 1, n = 6, q = 2; E = 12, M = 4, N = 4, K = 18. Sûr m = 5, p = 1, n = 8, q = 2; E = 24, M = 8, N = 6, K = 36. Sûr m = 3, p = 1, n = 10, q = 2; E = 60, M = 20, N = 12, K = 40.
- 6) Es fen nun m = 5, p = 2, so tann man n = 4, 5, 6, u. f. w. fegen. Da aber

deiben nur die Werthe q=1, q=2 übrig. Sent man q=1, und läße n unbestimmt, so finder man, A=6+n, $E=\frac{12n}{6+n}$, $M=\frac{8n}{6+n}$, $N=\frac{12}{6+n}$. Es kann daher in nicht größer als 6 senn, weil N fonst einem Bruche gleich wert den mürde. Auch kann nicht n=6 tenn; weil sonst ein Flak chenwinkel so größ wäte; als die benden andern zusammen, welches unmöglich ist. Es bleiben also nur die Werthe n=4, n=5 übrig, und diese Werthe geben sit E. Früche. Man see daher q=2, so erhalt man; A=12-2n, und es darf also n nicht größer als 5 senn. Es bleiben demnach nur die Werthe n=4, n=5, und diese geben,

- 7) Súr m = 3, p = 2, n = 4, q = 2; E = 12, M = 8, N = 6, K = 24. Súr m = 3, p = 2, n = 5, q = 2; E = 30, M = 20, N = 12, K = 60.
- 8) Es fen in = 3, p = 3; alsbann tann q hicht größer als i fenn, und man erhalt fur biefen Werth A = 6, und babet,

Dier kann n jeden beliebigen Werth über 3 erhalten. Der Korper wird von zwen besiebigen Bi leden, und dopppelt so vielen Brebeden, als das Bieled Geiten hat, begrangt. Et kann leicht konftruirt werden; benn man darf inur an jedet Binkelipige des Bieledes breb Orepede segen.

9) Man sege in = 3, p = 4; alebann barf q nicht große ber als 1, und n nicht großer als 5 senn, weil sonft die Summe ber Aldbenwinkel = ober > 360° ware. Man kann also nut n = 4, ober n = 5 segen. Es ift aber,

10) für m = 5, p = 4, n = 4, q = 1, E = 24, M = 52, N = 6, K = 60. Kür m = 3, p = 4, n = 5, q = 1,

E = 60, M = 80, N = 12, K = 150.

- 11) Es sen nun m = 4, p = 3; alsdann kann q nicht größer als 2 sepn, weil n > m angenommen wird; aber auch nicht kleiner als 2, weil zur Bildung eines körperlichen Winzels menigstens drey Flachenwinkel erfordert werdem. Man sese also q = 2; alsdann ist A = 16 2n, und n kann das her nicht größer als 7 sepu. Es bleiben also nur die Werthen = 5, n = 6, n = 7; und von diesen wird wieder 5 und 7 wegen f 122 ausgeschlossen. Man darf also nur n = 6 sepen. Es ist aber,
 - 12) Für m = 4, p = 1, n = 6, q = 2; E = ρ 4, M = 6, N = 8, K = 36.
 - 13) Für m = 4, p=2, tann n nicht fleiner als 5 und . q nicht größer als 1 feyn; und man erhalt baber A = 8, und

E = an, M = n, N = 2, K = 3u, wo n feben beliebigen Werth, ber nicht kleiner als 5 ift, errhalten kann. Diefer Körper wird also von zwen beliebigen reguldren und gleichen Bieleden, und so vielen Quadraten begränzt, als das Bieled Seiten hat. Er ift bemnach nichts anders all ein geradftebendes Prifma mit quadratifden Seis tenflachen.

24) Für m = 5; p = 1, kann nur q = 2 fenn. Ales dann ift aber A = 20 - 5n, und folglich kann nur n = 6 fenn. Dieser Berth giebt,

E = 60, M = 12, N = 20, K = 90.

16) m = 6, ober m > 6, kann, wie leiche zu begreifen ift, nicht flatt finden.

Det leichtern Ueberficht wegen, will ich nun bie Rorper in ber Ordnung, wie fie gefunden worden, jufammen ftellen.

I. Ein Körper, welcher von & Drepeden und 3 Quadrage ten begrängt wird. Er hat 6 Eden und 9 Kanten. Jeder Borperliche Wintel wird von einem ebenen Wintel von 60° und 2 von 90° eingeschlöffen. Er ift nichts anders als ein ger radfiehenbes, drepseitiges Prisma mit quadratischen Seitenflächen.

H. Ein Körper, welcher von 8 Drepetten und 18 Quae braten begrant wird. Er hat 24 Eden und 48 Kanten. Jes ber torperliche Winkel wird von einem ebenen Winkel von foo und 3 von 90° eingeschloffen. Fig. 48 zeigt das Nep dies fes Körpers.

III. Ein Körper, welcher von 4 Orenecken und 4 Sechse ecken begränzt wird. Er hat 12 Ecken und 18 Kanten. Jes ber körperliche Winkel wird von einem ebenen Winkel von 60° und 2 von 120° eingeschlossen. Das Net Fig. 49.

IV. Ein Körper, welcher von 8 Dreneden und 6 Achte eden begränzt wird. Er hat 24 Eden und 36 Kanten. Jes ber körperliche Winkel wird von einem ebenen Winkel von 60° und 2 von 135° eingeschlossen. Das Ney Fig. 50.

V. Ein Körper, welcher von 20 Orepeden und 12 Jehns eden begränzt wird. Er hat 60 Eden und 90 Kanten. Jes der körperliche Winkel wird von einem abenen Winkel von 60° und 2 von 144° eingeschloffen. Das Nep Fig. 513 es muß doppelt gemacht und an einander gefägt werden.

VI. Ein Körper, welcher von 8 Dreneden und 6 Quas draten begrant wird. Er hat 12 Eden und 24 Kanten. Jes der körperliche Winkel wird von 2 ebenen Winkeln von 60° und 2 von 90° eingeschloffen. Das Neg Kig. 52.

VII. Ein Korper, welcher von 20 Drepeden und 12

Fänfeden begränzt wied. Er hat 30 Eden und 60 Kanten. Jever körperliche Winfel wird von 2 evenen Winkeln von 60° und 2 von 108° eingeschloffen. Das Nep Fig. 53; es muß doppelt gemacht werden.

VIII. Ein Körper, weicher von 2 n Orepeden und a neden begrant wird. Er hat 2 n Eden und 4 n Kanten. Jader torperliche Binkel wird von dren ebenen Binkeln von 600
- und von einem Winkel des nede = $\frac{an-4}{n}$ 900 eingeschloffen.

IX, Ein Korper, weicher von 32 Oreneden und 6 Quasdraten begränzt wird. Er hat 24 Eden und 69 Kanten. Jes der körperliche Winkel wird von 4 ebenen Winkeln von 60° und einem von 90° eingeschlossen. Das Neg Fig. 54.

A. Ein Porper, welcher von 80 Dreveden und 12 Funfeden begrant wird. Er hat 60 Eden und 150 Kanten. Jes ber theverliche Winkel wird von 4 ebenen Winkeln von 609 und einem von 1089 eingeschloffen. Das Reg Kig. 55; es muß doppelt gemacht werden.

XI, Ein Körper, welcher pon 6 Quabraten und 8 Seches eden begrängt wird. Er bat 24 Eden und 36 Kanten. Jes ber torperliche Winkel wird von einem ebenen Binkel von 300 und 2 von 1209 eingeschloften. Das Nes Fig. 56.

XII. Ein Körper, welcher von n Onadraten und a neden begraust wird, wofür aber n nicht kleiner als 5 febn dark. Er hat 2 n Erken und 3 n Kanten. Jeder körperliche Winkel wird von 2009 und einem Winkel wird von 2009 und einem Winkel des n Ers = $\frac{2n-4}{n}$ 300 eingeschlossen, Er ift ein ger radstehendes Prisma.

XIII. Ein Rorper, welcher von 12 Fünfeden und 20 Secheeden begrangt wird. Er hat 60 Eden und 90 Kanten.

Jeder körperliche Wintel wird von einem ebenen Wintel von 1080 und 2 von 1200 eingeschloffen. Das Neg Fig. 57: es i muß doppelt gemacht werden.

Es giebt alfo aufer ben Korpern I. VIII. XII, nur 10 Rorper, welche von regularen und gleichen Bieleden imeyers len Art begrangt werden, und deren torperliche Mintel gleich voer sommetrisch find.

\$ 126,

Aufg. Ein körperlicher Wintel, welcher von p Slarchenwinkeln, jeder = *, und von q Winkeln, jeder = *, eingeschlossen wird, ist innerhalb einer Augel von einem gegebenen Salbuesser = i, so gesent worden, daß seine Spige die Augelstäche berührt, und alle seine Schenkel einander gleich werden: man soll die den Slächenwinkeln *, *, korrespondirenden sphärischen Winkel und die gleichen Schenkel finden.

- 2) Jeder der in 3 erwähnten unbekannten Bogen sein = 4, Man verbinde die Endpunkte seder swen neben einand der liegenden Bogen durch andere Bogen größter Kreise; so entsteben p + 4 gleichschenkelige spharische Orevede. 3u den p sphar. Oreveden mit dem Scheitelwinkel sehnendrenede (§ 48) mit dem ebenen Scheitelwinkel 2, und zu den g sphar. Oreveden mit dem Scheitelwinkel 2, eben so viele Sehnendrevede mit dem scheinen Scheitelwinkel 2, eben so viele Sehnendrevede mit dem scheinen Scheitelwinkel 2.
- 3) Die Begiehung swiften bem Scheitelmintel eines fpherifden Drepedes, und dem Scheitelmintel feines Schnendren, edes, wurde § 52 Anmert. gefunden. Auf ben gegenwätzigen

Ball' angewandt, muß man anflatt a, b, A, erft *, n, 6, and hernach ≈1, n, 0', fegen. Dierdurch erbalt man,

Sin in = Cos. in Sin. is, Sin. i = Cas. in Sin is, and bierand die Proportion,

Sin. 1 % : Sin. 1 % = Sin. 1 4 : Sin. 1 6. Da bier & und & befannt find, fo lagt fich vermittelft biefer Proportion & aus & finden.

4) Ans der Gleichung $p\theta + q\theta' = 360^{\circ}$ in 1, erhalt man $\frac{1}{2}q\theta' = 280^{\circ} - \frac{1}{2}p\theta$, und daher,

Sin & q# = Sin & p 6.

- 5) In der Goniometrie wird gezeigt, wie man im Allgestweinen, wenn o trgend einen Binket, und n irgend eine gangs politive Zaht bezeichnet, Jin. no durch Sin. o ausdrücken könne (m. f. Atügets analytische Teigonometrie S., 65., oder deffen mathematisches Botterbuch vier Th., 5. 540); also auch Sin. ½ qe' durch Sin. ½ e', und Sin. ½ pè durch Sin. ½ e. Hier werden wir indessen dieser kormel nicht bendihigt senn, weil q und p immer nur klein find, und die Baht 4 nicht überfteigen.
- 6) Hat man hun Sin. Last durch Sin. Le' und Sin. 3 pe burch Sin. Le ausgedrückt, so darf man nur für Sin. Le' fie nen Berth Sin. Le' Sin. 3 aus 3 fegen. Man erhalt alee: dann eine Gleichung, worin bloß Sin Le unbekannt ift. Die allgemeine Auftosung der gegenwärtigen Aufgabe beruhet alfo auf der allgemeinen Auftosung der Gleichungen.
- 7) Bat man auf diefe Betfe Sin. & & gefunden, fo erhale man aus 3,

Cos. $\frac{1}{4}\pi = \frac{\sin \frac{\pi}{4}\pi}{\sin \frac{\pi}{4}\pi}$

worans fic nun que'n befimmen laft.

8) Es fen nunmehr = ber gesuchte Schenkel ber theperlie den Bintels; er ift nichts anders als die Gehne bes Bagens n; man hat baber,

x m er Sin. 4 7.

Suf. Bermittelft ber bier aufgeloften Aufgabe laffen fid die in § 195 aufgegablten Rorper, auf Die folgenoe Art tone Rruiren, wenn man fich etwa mit ihren Regen nicht beanie. gen wollte. Man tonftruire namlich querft ben torperlichen Binfel, indem man die Bintel 1, 1, und ben Bogen n. fo arok macht, mie bie Rechnung giebt; beschreibe bierguf um Die in 2 eradbnten Gebnendrenede Rreife, beren Beripberian nothwendig in Die Rugelflache fallen werden; vollende in Dies fen Rreifen, wenn es nobtig ift, Die Bielede, welche ben fare perlichen Mintel begrangen; an febem Bintelpuntte Diefer Diele, ede fege man einen, bem vorigen gleichen poer fymmetrischen torperlichen Bintel, weburch mieber neue Bielede entfteben, an beren Bintelpuntte man epenfalls folde Bintel fest, und fabre hiermit fo lange fort, bis fic ber Rorper ichlieft. Diefer Conftruttion erhellet, Def fich alle folde Rorper, fo mie Die regularen, innerhalb einer Rugel beichreiben laffen; ein Umftand, Der febr viel gur leichtern Berechnung berfelben bentraat.

127.

Aufg. Der Salbmesser einer Rugel, in welcher bie in § 125 aufgeführten Körper beschrieben find, ift gegez ben: man soll allgemeine Ausdrucke für die Große ihrer Kanten, ihrer Grangfächen, ihrer Oberstäche, ihres kubie stehen Inhalts, und für den Salbmesser des um jede Grangsstäche beschriebenen Kreises finden.

- Aufl. 1) Der Rorper werde von meden und neden bes grangt, und jeder forperliche Winkel beffelben von p Polygons winteln des ersten und a Polygonwinteln, des zwenten Bieled's gebildet. Jede von den gleichen Kauten des Körpers sen fetz ner = x; det Halbmeffer des um das med beschriebenen Kreib, ses = y, und der Halbmeffer des Kreises um das ned = y'. Der Polygonwintel des mads sen = 2, und der des ned's = 2, so das!

$$z = \frac{2m-4}{m} \Re, \quad z' = \frac{2n-4}{n} \Re.$$

- 2), Jedem geradipigen Bielede entspricht ein spharisches Bieled auf der Augelsiche: es giebt daber auch nur zwen Arzten von diesen letzteren; zum med gehöre ein spharisches Biele ed mit dem Polygonwinkel = 0, und zum nede eines mit dem Polygonwinkel o'. Die gleichen Seiten dieser Bielede, d. h. die Bogen, wesche die Kanten des Körpers zu Sehnen haben, sepen = 7.
- 3) Man dente sich aus dem Mittolpunkte der Augel auf eines der mede ein Perpendiket herabgelassen; so gehet dieses Perpendikel durch den Mittelpunkt des um das Vieled ber schriebenen Areises, und trifft verlangert den Pol desselben. Bon diesem Pole denke man sich ferner nach sedem Wintels punkte des spharischen Vieleckes Bogen größter Areise gezos gen; die Bogen setz ich = φ , und den Winkel, welche sede zwen zundchk liegende rings um den Pol einschließen, = α ; alsdann ift nach I 57

$$\alpha = \frac{360^{\circ}}{m}, \sin \varphi = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}}.$$

Bezeichnet ferner a', o', für bas ped bas Namlice als a. v, für das med; so ift auch

$$a' = \frac{360^{\circ}}{n}$$
, Sin. $e' = \frac{\sin \cdot \frac{\pi}{2}}{\sin \cdot \frac{\pi}{2}}$

4) Biffe man nun die Seite n ber fobdrichen Bieled's, fo wurde man auch vermittelft diefer Gleichungen Bin. q, Sin. q', bestimmen tonnen, und bieraus ferner die hatbmeffer y, y's denn es ift, wenn der halbmeffer ber Rugel == x, ;

$$y = r \sin \varphi$$
. $y' = r \sin \varphi'$.

6) Um 7, gu beftimmen, mußte man einen ber Bely, gonwintel e, e', fennen; benn man bat (§ 57.6)

Cos.
$$\frac{1}{4}\eta = \frac{\cos \frac{180^{\circ}}{m}}{\sin \frac{1}{4}\theta} = \frac{\cos \frac{180^{\circ}}{n}}{\sin \frac{1}{4}\theta}$$

5) Man erhalt aber bie Wintel e, de, aus ben bepben Bleichungen (§ 126. 5 und 4),

Sin.
$$\frac{1}{4}$$
 $\theta' = \frac{8 \text{in. } \frac{1}{4} \pi'}{8 \text{in. } \frac{1}{4} \pi} \text{Sin. } \frac{1}{4} \theta_f$
 $8 \text{in. } \frac{1}{4} \eta \theta' = 8 \text{in. } \frac{1}{4} p \theta_f$

7) Alles beruhet alfo auf ber Auflofung diefer benden Gleischungen. hat man namlich harque e bestimmt, so lagt fich n, w, w', und somit auch y, y', finden. Aber auch die Rante des Korpers ift alsdann bekannt; benn man hat, (§ 126, 8)

8) Aus y, y4, x, findet man nun den Glaceninhalt der Grangflachen; benn wenn f'ben Inhalt des mede und f' ben Inhalt des nede bezeichnet; fo ift,

$$f = \frac{1}{2} mx V(y^2 - \frac{1}{4}x^2), \quad f' = \frac{1}{4} nx V(y'^2 - \frac{1}{4}x^2).$$

9) Aus \$ 125 ift die Angabl ber mede und die Angabl ber nede, welche ben Korper begrachzen, schon bekannt; die erftere sep im Allgemeinen = M, die gwente = N; alse dann ift

the Oberfidche des Karpers = Mf + Nf.

10) Die Entfernung jedes meds vom Mittelpunkte der Augel ift $V(\mathbf{r}^2-\mathbf{y}^2)$, und die Entfernung des necks = $V(\mathbf{r}^2-\mathbf{y}^2)$. Denkt man sich daher den Körper in Lauter Pyramiden zerlegt, deren Gränzsischen die erwähnten Biete ede find, und teren Spigen sich im Mittelpunkte der Augel befinden: so ist

ber Inhalt bee Rorpers = IMfV(r2-y2) + INfV(r2-y4),

11) Bermittelft aller diefer Formeln laffen fich nun die in \$ 125 aufgegabtten Rorper febr leicht berechnen.

- a) Berechnung bes: Körpers I. § 125.
- 1) Jar diesen Körper ift m = 3, n = 4; p = 1. q = 2; x = 60°, x' = 90°; M = 2, N = 3. Man hat also aus \$ 127. 6 die benden Gleichungen,

Sin.
$$\frac{7}{2}\theta' = \frac{\sin \frac{45^{\circ}}{5in}}{\sin \frac{45^{\circ}}{30^{\circ}}}$$
 Sin. $\frac{7}{4}\theta = \sin \frac{7}{4}\theta = \sin \frac{7}{4}\theta$
Sin. $\theta' = \sin \frac{7}{4}\theta$;

und biefe geben,

Sin. ½ 6' = Sin. 6' V 2 = 2 Sin. ½ 6' Cos. ½ 6' · V' 2; weraus man erhalt,

Cos.
$$\frac{1}{4} 4' = \frac{1}{2 \sqrt{2}}$$
, Sin. $\frac{1}{4} 4' = \frac{\sqrt{7}}{2 \sqrt{2}}$.

2) Demnach ift (§ 127. 5)

Cos.
$$\frac{1}{4}\eta = \frac{\text{Cos. } 45^{\circ}}{\sin \frac{1}{4}\theta'} = \frac{2}{V7}$$
, Sin. $\frac{2}{4}\eta = \frac{V3}{V7}$.

3) Aus § 127. 3, hat man fetnet $\alpha = 120^{\circ}$, $\alpha' = 90^{\circ}$, $\sin \varphi = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \eta}{\sin 60^{\circ}} = \frac{2}{V7}$, $\sin \varphi' = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \eta}{\sin 45^{\circ}} = \frac{V6}{V7}$.

4) Folglidy, (§ 127. 4)

$$y = \frac{2 r}{V r}, y' = \frac{r V 6}{V r}.$$

Aud ift (§ 127. 7)

$$x = \frac{2rV3}{V'7}.$$

5) Man hat also (§ 127. 8)

$$f = \frac{3r^2 \sqrt{3}}{7}, \quad f' = \frac{12 r^2}{7}.$$

- 6) Die Oberfliche des Korpers = \frac{r^2 (36 + 61/3)}{7}
- 7) Der kubische Inhalt = $\frac{18 \text{ r}^3}{7 V 7}$.

§ 12g.

b) Berechnung bes Rörpers II. § 125.

1) Für diesen Körper ift m=3, n=4; p=1, q=5; %=60°, %=90°; M=8, N=18. Es ift alse (§ 127.6)

Sin.
$$\frac{1}{4}\theta' = \frac{\sin 45^{\circ}}{\sin 30^{\circ}}$$
 Sin. $\frac{1}{4}\theta = \sin \frac{1}{4}\theta$. $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ Sin. $\frac{1}{4}\theta' = \sin \frac{1}{4}\theta$;

and daber,

$$\sin \frac{1}{2}\theta' = \frac{\sin \frac{1}{2}\theta'}{V^2}.$$

2) Run ift aber Sin, \(\frac{1}{2}\textit{\textit{d}}' \rightarrow \text{Sin. } \(\frac{1}{2}\text{\text{d}}' \rightarrow \text{Cos. } \(\frac{1}{2}\text{d}' + \text{Cos. } \(\frac{1}{2}\text{d}' \rightarrow \text{Sin. } \(\frac{1}{2}\text{d}' \) \(\text{Cos. } \(\frac{1}{2}\text{d}' \) \(\frac{1}{2}\text{Cos. } \(\frac{1}{2}\text{d}' \) \(\frac{1}2\text{d}' \) \(\frac{1}{2}\text{d}' \) \(\frac{1}2\text{d}' \) \(\frac{1}2\t

(4 Con get -1) Sin & el. Wird diefer Werth in der vorigen Gleichung subftituirt, fo etr balt man nach der Bivifion mit Sin. & et.

$$4 \cos \frac{1}{2} e^{ix} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ind bieraus,

$$Cos._{10} = v \frac{1 + v^2}{4v^2} = v^2 + \frac{v^2}{8}i^3$$

$$\sin\frac{1}{4} = \sqrt{\frac{6-\nu 2}{8}}.$$

Cos.
$$\frac{1}{2}\eta = \frac{\cos 45^{\circ}}{\sin \frac{1}{2}\theta'} = V \frac{4}{6 - V^{2}} = V \frac{12 + 2V^{2}}{17}$$

$$\sin \phi = \frac{\sin \frac{1}{4} \phi}{\sin 60^{\circ}} = V \frac{\sin - 8V^{\circ}}{5^{1}},$$

$$\sin \phi' = \frac{\sin \frac{1}{4} \phi}{\sin 45^{\circ}} = V \frac{\cos - 4V^{\circ}}{17}.$$

Sin. $\frac{1}{4}\eta = V \frac{5-2V^2}{15}$.

$$y = r V \frac{20 - 8 V^2}{6^2}, y^i = r V \frac{10 - 4 V^2}{17}$$

$$x = 2 r V \frac{5-2 V^2}{17}.$$

$$f = \frac{r^2 V 3}{17} (5 - 2 V 2), \quad f' = \frac{4 r^2}{17} (5 - 2 V 2),$$

$$\frac{r^{2} \cdot (5-2V^{2})}{^{27}V^{17}} [{}^{1}V(3^{1}+8V^{2}) + {}^{24}V(7+4V^{2})].$$

$$a = 60^{\circ}$$
, $a' = 120^{\circ}$; $M = N = 4$; also,

$$\sin \frac{1}{2} = \frac{\sin 60^{\circ}}{\sin 70^{\circ}} \sin \frac{1}{2} = \sin \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}$$

and dater,
$$\sin \theta = \frac{\sin \frac{1}{2}\theta}{\sqrt{3}}$$
,

Cos.
$$\frac{1}{2} V = \frac{1}{2V_3}$$
, Sin. $\frac{1}{2} V = \frac{V_{11}}{2V_3}$.

2) Ces,
$$\frac{1}{2}\eta = \frac{\hat{C}_{os}}{\sin \frac{1}{2}\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{V_{11}}$$
, Sin, $\frac{1}{2}\tilde{\eta} = \frac{V_{2}}{V_{11}}$

$$\sin \phi = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \cos \phi} = \frac{2 \frac{1}{2} 2}{V 33}$$

$$\sin_{\theta} \varphi' = \frac{\sin_{\theta} \frac{1}{2} \eta}{\sin_{\theta} 30^{\circ}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

4)
$$y = \frac{2 \hat{r} V^2}{V_{33}}$$
, $y' = \frac{2 \hat{r} V^2}{V_{11}}$, $\dot{x} = \frac{4 \hat{r} V^2}{V_{11}}$.

5)
$$f = \frac{2 r^2 \sqrt{3}}{11}$$
, $f' = \frac{12 r^2 \sqrt{3}}{11}$.

$$\text{Cos. } 45^{\circ} = -\frac{1}{V^{2}} = 2 \text{ Cos. } \frac{1}{4} \frac{2}{4} - 1, \text{ and dater}$$

$$\text{Cos. } \frac{1}{4} \frac{2}{4} = \frac{V(2 - V^{2})}{2}, \text{ Sin. } \frac{1}{4} \frac{2}{4} = \frac{V(2 + V^{2})}{2}.$$

$$\sin \frac{1}{2}\theta' = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha'}{\sin \frac{1}{2}\theta^2} \sin \frac{1}{2}\theta = \sin \frac{1}{2}\theta \cdot \frac{1}{2}(2+\frac{1}{2})\theta$$

$$\operatorname{Sin}_{i} V = \frac{\operatorname{Sin}_{i} \frac{1}{2} V}{V 2 + V 2} = \operatorname{Sin}_{i} \frac{1}{2} V \cdot V \frac{2 - V 2}{2},$$

Cos.
$$\frac{1}{4} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{8}}$$
, Sip. $\frac{1}{4} = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{2}}{8}}$.

2) Da Cos.
$$\frac{186^{\circ}}{n}$$
 = Cos. 22° 38° = Sin, 67° 30′ =

$$\sin \frac{1}{2} \omega = \frac{V(2+V^2)}{2}$$
; so if (§ 127. 5)

Cos.
$$\frac{1}{4}\eta = V \frac{4+2V^2}{6+V^2} = V \frac{10+4V^2}{17}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = V \frac{7 - 4V^2}{27}$$
, so this is

3)
$$\alpha = \frac{360^6}{m} = 120^\circ$$
, $\alpha' = \frac{360^6}{n} = 45^\circ$, Sin. $\frac{1}{2}\alpha' = \frac{1}{2}$
Sin. 22° 30′ = Cos. 67° 30′ = Cos. $\frac{1}{2}\alpha' = \frac{V(2-V2)}{2}$;

$$\sin \phi = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \eta}{\sin \frac{\pi}{4} \alpha} = V^{\frac{28 - 16 V^2}{5^1}}$$

Sin.
$$\varphi' = \frac{\sin \frac{1}{2} \frac{\eta}{2}}{\sin \frac{1}{2} \frac{\eta}{2}} = V \frac{28 - 16 V^2}{17(8 - V^2)} = V \frac{12 - 9 V^2}{17}$$

4)
$$y = r V \frac{28 - 16V s}{5^1}$$
, $y' = r V \frac{12 - 2V s}{17}$,
 $x = 2 r V \frac{7 - 4V s}{17}$.

6)
$$f = \frac{r^2 V 3}{17} (7 - 4V^2), f' = \frac{4r^2 V (19 - 6V^2)}{17}$$

= $\frac{12 V^2 - 4}{17} r^2$.

6) Oberfidic des Rorp. =
$$\frac{56\sqrt{3-321/6+721/2-24}}{17}$$
re.

7) Inhalt deffelben =

$$\frac{8r^{2}}{17V^{17}} \left[\frac{7-4V^{2}}{3}V(23+16V^{2})+(3V^{2}-1)V(5+2V^{2}) \right].$$

\$ 132

o) Betechnung bes Rorpets V. 9 125.

1) Für diesen Körper ist m = 5, n = 10; p = 1, q = 2; $n = 60^\circ$, $n = 144^\circ$; m = 20, m = 12. Da nun Sin. 18° als die halbe Seite des Zehenecks für den Halbmester 1, $m = \frac{V \cdot 5 - 1}{4}$; so ist Sin. 72° $m = \frac{V \cdot (10 + 2V \cdot 5)}{4}$

Man hat daber,

$$\sin \frac{1}{4} = \frac{\sin 72^{\circ}}{\sin 30^{\circ}} \sin \frac{1}{4} = \sin \frac{1}{4} \cdot \frac{V(10' + 2V5)}{2}$$

 $\sin \frac{1}{4} = \sin \frac{1}{4} \cdot \frac{V(10' + 2V5)}{2} \cdot \frac{V(10'$

und daher,

$$\sin \theta' = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \theta'}{V^{(10+2V5)}} = \sin \frac{1}{2} \theta' \cdot V^{\frac{5-V5}{10}}$$

Heraus erhalt man, da Sin. $\theta' = 2 \sin \frac{\pi}{4} \theta' \cos \frac{\pi}{4} \theta'$.

Cos. $\frac{\pi}{4} \theta' = V \frac{5 - V 5}{40}$, Sin. $\frac{\pi}{4} \theta' = V \frac{35 + V 5}{40}$.

2) Cos.
$$\frac{1}{2}\pi = \frac{\text{Cos. } 18^{\circ}}{\text{Sin. } 48^{\circ}} = V \frac{50 + 10 \text{ V/s}}{70 + 2 \text{ V/s}} = V \frac{85 + 15 \text{ V/s}}{122}$$

Sin.
$$\frac{1}{2}\eta = V \frac{37 - 15V5}{122}$$
.

3)
$$\alpha' = 120^{\circ}$$
, $\alpha' = 36^{\circ}$; also,
 $\sin \varphi = \frac{\sin \frac{1}{2} \frac{4}{3}}{\sin 60^{\circ}} = V \frac{74 - 30 V 5}{183}$.

$$\sin \varphi' = \frac{\sin \frac{1}{2} \pi}{\sin \frac{1}{2}} = V \frac{72 - 16V_5}{61}$$

-4)
$$y = rV \frac{74 - 30V5}{r83}$$
, $y' = rV \frac{72 - 16V5}{61}$,
 $x = 2rV \frac{37 - 15V5}{r89}$.

5)
$$f = \frac{r^2 V_3}{192} (37 - 15V_5), \quad f' = 5r^2 V \frac{2617 - 1117V_5}{61}.$$

hieraus erhalt man nun ferner,

f) Berechnung bes forpers VI. § 125.

1) hier iff m = 3, n = 4; p = 2, q = 2; n = 60°, n/ = 90°; M = 8, N = 6; also,

Sin.
$$\frac{1}{4} \theta' = \frac{\text{Sin. } 45^{\circ}}{\text{Sin. } 50^{\circ}} \text{Sin. } \frac{1}{4} \theta = \text{Sin. } \frac{1}{4} \theta \cdot \frac{1}{4} \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} \frac{2}{4} \frac{1}{4} \frac{2}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4$$

2) Man dividire die zwente Gleichung durch die erfle; dies giebt, da Sin. 8' = 2 Sin. ½ 8' Cos. ½ 8', Sin. 8 = 2 Sin. ½ 8 Cos. ½ 8,

$$\operatorname{Cos.} \frac{1}{2} \theta' = \frac{\operatorname{Cos.} \frac{1}{2} \theta}{V^2}.$$

Man quadrire sowohl diese, als die erfte Gleichung in 1, und abdire fie hierauf; dies giebt, da Cos. 4 8 2 + Sin. 4 6/2 = 1,

$$1 = \frac{\cos \frac{1}{4} \theta^2}{2} + 2 \sin \frac{1}{4} \theta^2.$$

Mus diefer Gleichung erhalt man, wenn 1 - Sin, I de fur Cos, I de gefest wird,

$$\sin_{1} \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{V3}.$$

3) Daber ift

Cos.
$$\frac{1}{4}\eta = \frac{\cos.60^{\circ}}{\sin.\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
, $\sin.\frac{1}{4}\eta = \frac{1}{4}$

4) $\alpha = 120^{\circ}$, $\alpha' = 90^{\circ}$; also,

Sîn.
$$\varphi = \frac{1}{V3}$$
, Sin. $\varphi' = \frac{1}{V2}$.

$$5 \quad y = \frac{x}{V5}, \ y' = \frac{x}{V8}, \quad x = x.$$

winkeln des erften und a Bologonwinkeln, des zwenten Beled's gebildet. Jede von den gleichen Rauten des Körpers fen fets ner = x; det Halbmeffer des um das med beschriebenen Kreis fes = y, und der Halbmeffer des Kreifes um das ned = y'. Der Bologonwinkel des mad's fen = 2, und der bes ned's = 2, und der bes ned's = 2, und der bes ned's = 2, und der bes ned's

$$z = \frac{2m-4}{m}\Re, \ z' = \frac{2n-4}{n}\Re.$$

- 2), Jebem gerablinigen Bielede entspricht ein spharisches Bieled auf der Augelsidche: es giebt daber auch nur zwen Arten von diesen letteren; jum med gehöre ein spharisches Biels ed mit dem Polygonwinkel = 0, und jum nede eines mit dem Polygonwinkel e'. Die gleichen Seiten dieser Bielede, d. h. die Bogen, welche die Kanten des Körpers zu Sehnen haben, seven = 7.
- 3) Man dente fic aus dem Mittelpunkte der Augel auf eines der mede ein Perpendiket herabgelaffen; so gehet dieses Perpendikel durch den Mittelpunkt des um das Vieled ber schriebenen Areises, und trifft verlangert ben Pol deffelben. Bon diesem Pole benke man fich ferner nach sedem Binkel. punkte des sphartichen Vieleckes Bogen größter Areise gezwan; die Bogen setz ich = φ , und den Binkel, welche sede zwen zunächk liegende rings um den Pol einschließen, = α ; alsbann ift nach I 57

$$\alpha = \frac{360^{\circ}}{m}, \sin \varphi = \frac{8in. \frac{1}{2} \eta}{\sin, \frac{1}{2} \alpha}.$$

Bezeichnet ferner a', p', für bas ped bas Namlice als m, p, für bas med'; fo ift auch

$$\alpha' = \frac{360^{\circ}}{n}$$
, Sin. $\varphi' = \frac{\sin \cdot \frac{\pi}{4}}{\sin \cdot \frac{\pi}{4}}$.

4) Bafte man nun die Seite η ber fpbarifcen Bielede, fo wurde man auch vermittelft diefer Gleichungen Bin. φ, Sin. φ', bestimmen tonnen, und hieraus ferner, die Hatbmeffer y, y'; denn es ift, wenn der Halbmeffer der Ruget = r, i y = r Sin. φ. y' = r Sin. φ'.

5) Um 7, su bestimmen, mußte man einen ber Poly, gonwintel e, e', tennen; benn man bat (\$ 57.6)

Cos.
$$\frac{1}{4} = \frac{\cos \frac{180^{\circ}}{m}}{\sin \frac{1}{4} = \frac{\cos \frac{180^{\circ}}{n}}{\sin \frac{1}{4} e'}$$

6) Man erhalt aber bie Bintel e, et, aus ben bepben Gleichungen (§ 126. 5 und 4),

Sin.
$$\frac{1}{4}$$
 $\theta' = \frac{\sin \frac{1}{4} \pi'}{\sin \frac{1}{4} \pi} \sin \frac{1}{4} \theta_{\ell'}$
Sin. $\frac{1}{4}$ η $\theta' = \sin \frac{1}{4} \eta \theta_{\ell'}$

7) Alles berubet also auf ber Auftstung diefer berben Gleischungen. hat man namlich barqus e bestimmt, fo lagt fich n, w, w', und somit auch y, y', finden. Aber auch die Rante bes Korpers ift alsdann befannt; benn man bat, (§ 126, 8)

8) Aus y,' y', x, findet man nun ben Blacheninhalt ber Grangflachen; benn wenn t'den Inhalt bes mede und f' ben Inhalt bes nede bezeichnet; fo ift,

$$f = \frac{1}{2} mx V (y^2 - \frac{1}{2}x^2), \quad f' = \frac{1}{2} nx V (y'^2 - \frac{1}{2}x^2),$$

9) Aus § 125 ift die Angahl der mede und die Angahl ber nede, welche den Körper begrachzen, schon bekannt; die erstere sen im Allgemeinen = M, die gwente = N; alse dann ift

tis Oberfidche des Korpers = Mf + Nf.

20) Die Entfernung sebes meds vam Mittelpunkte ber Kugel ift $V(\mathbf{r}^2-\mathbf{y}^2)$, und die Entfernung des necks = $V(\mathbf{r}^2-\mathbf{y}'^2)$. Denkt man sich daher den Körper in lauter Pyramiden zerlegt, deren Gränzsächen die erwähnten Bield ede sind, und teren Spigen sich im Mittelpunkte der Lugel besinden: so ist

ber Inhalt bes Rorpers = iMfV(r2-y2) + iNf/V(r2-y12).

11) Bermittelft aller biefer Formeln laffen fich nun bie in \$ 125 aufgezählten Korper febr leicht berechnen.

a) Berechnung bes Körpers I. 6 125.

1) Far diesen Körper ift m = 3, n = 4; p = 1. q = 23 % = 600, 2' = 900; M = 2, N = 3. Man hat also aus \$ 127. 6 die benden Gleichungen,

Sin.
$$\frac{7}{2}\theta' = \frac{\sin. \frac{45^{\circ}}{30^{\circ}}}{\sin. \frac{7}{2}\theta}$$
 Sin. $\frac{7}{2}\theta = \sin. \frac{7}{2}\theta + \frac{7}{2}\theta$
Sin. $\theta' = \sin. \frac{7}{2}\theta$;

und diefe geben,

Sin. & & = Sin. & V 2 = 2 Sin. & Cos. & & V 2; weraus man erhalt,

Cos.
$$\frac{1}{2} a' = \frac{1}{2 \sqrt{2}}$$
, Sin. $\frac{1}{2} a' = \frac{\sqrt{7}}{2 \sqrt{2}}$.

2) Demnach ift (§ 127. 6)

Cos.
$$\frac{1}{4}\eta = \frac{\text{Cos. } 45^{\circ}}{\sin \frac{1}{4}\theta'} = \frac{2}{V7}$$
, $\sin \frac{\pi}{4}\eta = \frac{V3}{V7}$.

5) Aus § 127. 3, hat man fernet $\alpha = 120^{\circ}$, $\alpha' = 90^{\circ}$, $\sin \varphi = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin 60^{\circ}} = \frac{2}{V7}$, $\sin \varphi' = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin 45^{\circ}} = \frac{V6}{V7}$.

4) folglidy, (§ 27. 4)
$$y = \frac{2 r}{V 7}, y' = \frac{r V 6}{V 7}.$$

Aud ift (§ 127. 7)

$$x = \frac{2r V 3}{V 7}.$$

5) Man hat also (§ 127. 8)

$$f = \frac{5r^2 V 3}{7}, \quad f' = \frac{12 r^2}{7}.$$

- 6) Die Oberfidche des Körpers = $\frac{r^2(36+61/3)}{7}$
- 7) Der kubische Inhalt = $\frac{18 \text{ r}^2}{7 V 7}$.

§ 12g.

b) Berechnung bes Rörpers II. § 123.

1) Für diesen Körper ift m=3, n=4; p=1, 4=5; 2=60°, 2/=90°; M=8, N=18. Es ift alse

Sid.
$$\frac{1}{4}$$
 $\theta' = \frac{\sin 45^{\circ}}{\sin 30^{\circ}}$ Sin. $\frac{1}{4}\theta \Rightarrow \sin \frac{1}{4}\theta$. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$, Sin. $\frac{1}{4}\theta' \Rightarrow \sin \frac{1}{4}\theta$;

und daber,

$$\sin \frac{1}{2} \theta' = \frac{\sin \frac{1}{2} \theta'}{V^2}.$$

2) Run ift aber Sin, For = Sin, (V + Ee) =

'Sin. θ' Cos. $\frac{1}{2}\theta'$ + Cos. θ' Sin. $\frac{1}{2}\theta'$ \Rightarrow 2 Sin. $\frac{1}{2}\theta'$ Cos. $\frac{1}{2}\theta'^2$ + (2 Cos. $\frac{1}{2}\theta'^2$ - 1) Sin. $\frac{1}{2}\theta'$ \Rightarrow (4 Cos. $\frac{1}{2}\theta'^2$ - 1) Sin. $\frac{1}{2}\theta'$.

Bird diefer Werth in der worigen Gleichung subftitutet, fo etr balt man nach der Bibifton mit Sin. 1 %,

$$4 \cos \frac{1}{2} e^{/2} - 1 = \frac{1}{16}$$

id bieraus,

$$Cos_{\frac{1}{2}}V = V \frac{1 + V^{2}}{4V^{2}} = V \frac{2 + V^{2}}{8}i^{1}$$

$$\sin \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{6 - \sqrt{2}}{8}}.$$

Cos.
$$\frac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos. } 45^{\circ}}{\sin \frac{1}{2}\theta'} = V \frac{4}{6 - V^{2}} = V \frac{12 + 2V^{2}}{17}$$

Sin.
$$\frac{1}{2}\eta = V \frac{5-2V^2}{17}$$
.

Sin.
$$\varphi = \frac{\sin_1 \frac{1}{4} \varphi}{\sin_1 6\varphi^0} = V \frac{2\varphi - 8Vg}{5^1}$$

Sin. $\varphi' = \frac{\sin_1 \frac{1}{4} \varphi}{\sin_1 4\varphi^0} = V \frac{\pi \varphi - 4Vg}{17}$

$$y = rV \frac{20 - 8V^2}{51}, y' = rV \frac{10 - 4V^2}{12},$$

$$x = 2r V \frac{5-2V^2}{47}.$$

$$f = \frac{r^2 V 3}{17} (5 - 2 V 2), \quad f' = \frac{4 r^2}{17} (5 - 2 V 2).$$

8) Der Inhalt bes Korpers =

$$\frac{\mathbf{r}^{2} \cdot (5 - 2V^{2})}{{}^{2}7V^{17}} \left[\frac{1}{2}V(3^{1} + 8V^{2}) + \frac{24}{2}V(7 + 4V^{2}) \right].$$

- c) Berechnung des Rorpers III. § 125.
- 1) Für diefen Körper ift m = 3, n = 6; p = 1, q = 2; 2 = 60°, 4' = 120°; M = N = 4; also,

$$\sin \frac{1}{2} = \frac{\sin . 60^{\circ}}{\sin . \pi^{\circ}} \sin . \frac{1}{2} = \sin . \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

and daher,
$$\sin \theta = \frac{\sin \frac{1}{2} \theta'}{\sqrt{3}}$$
,

ober , ba Sin. 6' == 2 Sin. I 6' Cos. I'6',

Cos.
$$\frac{1}{2} \nu = \frac{1}{2 \nu 3}$$
, Sin. $\frac{1}{2} \nu = \frac{\nu 11}{2 \nu 3}$.

- 2) Ces. $\frac{1}{2}\eta = \frac{\hat{C}_{0s}}{\sin \frac{1}{2}\theta} = \frac{\frac{1}{3}}{V_{11}}, \sin \frac{1}{2}\tilde{\eta} = \frac{V_{2}}{V_{11}}$
- 3) a = 1206, a) = 606; alfo,

Sin.
$$\phi = \frac{\sin_2 \frac{1}{2} \pi}{\sin_2 60^\circ} = \frac{2 \frac{1}{2} 2}{\frac{1}{2} \frac{3}{3}}$$

$$\sin_{\theta} \varphi' = \frac{\sin_{\theta} \frac{1}{2} \eta}{\sin_{\theta} 30^{\circ}} = \frac{2 \sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

- 4) $y = \frac{2 \hat{r} V^2}{V_{33}}$, $y' = \frac{2 \hat{r} V^2}{V_{11}}$, $\dot{x} = \frac{2 \hat{r} V^2}{V_{11}}$.
- 5) $I = \frac{2 r^2 V \delta}{11}, \quad I = \frac{12 r^2 V \delta}{11}.$
- 6) Oberfiche bes Körpers = $\frac{56 \, \mathrm{r}^2 \, V \, 3}{11}$.

7) Inhalt bestelben =
$$\frac{184 \text{ r}^3}{33 \text{ V}^{11}}$$

1) Dier ift
$$m = 3$$
, $n = 8$; $p = 1$, $q = 2$; $n = 60^{\circ}$
 $n = 135^{\circ}$; $M = 8$, $N = 6$; $Cos. $n' = Cos. 135^{\circ} = 135^{\circ}$$

Cos.
$$45^{\circ} = -\frac{1}{V^{2}} = 2 \cos \frac{1}{2} x^{2} - 1$$
, and dather $\cos \frac{1}{2}x' = \frac{V(2-V^{2})}{2}$.

$$\sin \frac{1}{2}\theta' = \frac{\sin \frac{1}{2}x'}{\sin \frac{1}{2}0^{\circ}} \sin \frac{1}{2}\theta = \sin \frac{1}{2}\theta \cdot \mathcal{V}(2+\mathcal{V}^2)$$

Sin,
$$\nu = \frac{\sin \frac{1}{2} \nu'}{\nu + \nu^2} = \sin \frac{1}{2} \nu \cdot \nu^2 - \nu^2$$

Cos.
$$\frac{1}{4}e^{2} = \frac{1}{8}\frac{2 + \frac{1}{2}}{8}$$
, Sip. $\frac{1}{4}e^{2} = \frac{1}{8}\frac{6 + \frac{1}{2}}{8}$.

$$\sin \frac{1}{2} \omega' = \frac{V(2+V2)}{2}$$
; so if (§ 127. 5)

Cos.
$$\frac{1}{2}\eta = V \frac{4+2V^2}{6+V^2} = V \frac{10+4V^2}{17}$$

$$\sin \frac{1}{4} \eta = V \frac{7 - 4V^2}{47 + 40} \text{ so so} \qquad \text{is} \qquad \text{if } \qquad \text{if }$$

g)
$$\alpha = \frac{3600}{m} = 1200$$
, $\alpha' = \frac{3600}{n} = 450$, Sin. $\frac{1}{2}\alpha' = \frac{3600}{n}$

Sin. 22° 30' = Cos.
$$67^{\circ}$$
'39' = Cos. $\frac{1}{2}$ x' = $\frac{V(2-V2)}{2}$; also,

$$\sin \phi = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \alpha} = V^{\frac{28 - 16}{12}}$$

Sin,
$$\varphi' = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \alpha'} = V \frac{28 - 16 V^2}{17(2 - V^2)} = V \frac{12 - 17 V^2}{17}$$

4)
$$y = r \sqrt{\frac{28 - 16 \sqrt{2}}{5^1}}, y' = r \sqrt{\frac{12 - 2 \sqrt{2}}{17}},$$

 $x = 2 r \sqrt{\frac{7 - 4 \sqrt{2}}{19}}.$

6)
$$f = \frac{r^2 \sqrt{3}}{17} (7 - 4\sqrt{2}), f' = \frac{4r^2 \sqrt{(19 - 6\sqrt{2})}}{17}$$

= $\frac{12 \sqrt{2} - 4}{17} r^2$,

6) Oberfläche des Rorp. =
$$\frac{56\sqrt{5-32}\sqrt{6+72}\sqrt{2-24}}{17}$$
r2.

$$\frac{8r^3}{17V^17} \left[\frac{7-4V^2}{3}V(23+16V^2) + (3V^2-1)V(5+2V^2) \right].$$

\$ 172,

- o) Betechnung bes Sbrpets V. § 125.
- 1) Für diesen Körper ift m = 3, n = 10; p = 1, q = 2; $n = 60^\circ$, $n' = 144^\circ$; M = 20, N = 12. Da nun Sin, 18° als die halbe Seite des Zehenecks für den Halbmeffer 1, $m = \frac{V \cdot 5 1}{4}$; so ift Sin, 72° m = Cos, 18° $m = \frac{V \cdot (10 + 2V \cdot 5)}{4}$

Man hat daber, Geometrie U.

$$\sin \frac{1}{2}\theta' = \frac{\sin 72^{\circ}}{\sin 30^{\circ}} \sin \frac{1}{2}\theta = \sin \frac{1}{2}\theta \cdot \frac{V(10 + 2V5)}{2}$$

 $\sin \theta' = \sin \frac{1}{2}\theta$

und baber,

$$\sin \theta' = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \theta'}{V^{(10+2V5)}} = \sin \frac{1}{2} \theta' \cdot V^{\frac{5-V5}{10}}$$

Heraus erhalt man, da Sin.
$$\theta' = 2 \sin \frac{\pi}{4} \theta' \cos \frac{\pi}{4} \theta'$$
, Sin. $\frac{\pi}{4} \theta' = V \frac{35 + V5}{49}$.

2)
$$\cos \frac{1}{2} \eta = \frac{\cos \frac{18^{\circ}}{\sin \frac{1}{2} \theta'}}{\sin \frac{1}{2} \theta'} = V \frac{50 + 10 V 5}{30 + 2 V 5} = V \frac{85 + 15 V 5}{122}$$

Sin.
$$\frac{1}{4}\eta = V \frac{37 - 15V5}{122}$$
.

3)
$$\alpha = 120^{\circ}$$
, $\alpha^{\circ} = 36^{\circ}$; diso,
 $\sin \varphi = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin 60^{\circ}} = V \frac{74 - 30 V 5}{182}$.

$$\sin \varphi' = \frac{\sin \frac{1}{2} \hat{\eta}}{\sin \frac{1}{2} \hat{\eta}} = V \frac{7^2 - 16V5}{61}.$$

-4)
$$y = r \nu \frac{74 - 30 \nu 5}{r85}$$
, $y' = r \nu \frac{72 - 16 \nu 5}{61}$,

$$x = 2 \text{ r} \sqrt{\frac{37 - 15 \text{ V} 5}{122}}.$$

5)
$$f = \frac{r^2 V_3}{122} (37 - 15V_5), \quad F = 5r^2 V \frac{26r_7^2 - 1117V_5}{61}$$

hieraus erhalt man nun ferner,

6) Die Oberfische bes Korpers = 20 f + 12 f'.

$$\frac{1}{51/61} \left[20 \text{ f} \gamma^{\frac{109+50}{5}+\frac{12}{5}} + \frac{12}{5} \gamma^{\frac{16}{5}-\frac{11}{61}} \right].$$

f) Berechnung bes Körpers VI. § 125.

1) Sier iff m = 3, n = 4; p = 2, q = 2; n = 60°, n' = 90°; M = 8, N = 6; also,

Sin.
$$\frac{1}{2} \theta' = \frac{\text{Sin. } 45^{\circ}}{\text{Sin. } 30^{\circ}} \text{Sin. } \frac{1}{4} \theta = \text{Sin. } \frac{1}{4} \theta \cdot \frac{1}$$

2) Man bividire die zwente Gleichung durch die erke; dies giebt, da Sin. 1/ == 2 Sin. 1/ Cos. 1/1/2 Sin. 1/2 Sin. 1/2 Cos. 1/1/2

$$\operatorname{Cos.} \frac{1}{4} \theta' = \frac{\operatorname{Cos.} \frac{1}{4} \theta'}{1/2}.$$

Man quadrire sowohl diese, als die erfte Gleichung in 1, und addire fie hierauf; dies giebt, da Cos. 4 8/2 + Sin. 4 6/2 = 1,

$$1 = \frac{\cos \frac{1}{2} \theta^2}{2} + 2 \sin \frac{1}{2} \theta^2$$
.

Aus dieser Gleichung erhalt man, wenn 2 - Sin, 30 für Cos, 30 geset wird,

$$\sin \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3) Daber ift

Cos.
$$\frac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos. } 60^{\circ}}{\text{Sin. } \frac{1}{2}\eta} = \frac{1/3}{2}$$
, Sin. $\frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}\eta$

4) $\alpha = 120^{\circ}$, $\alpha' = 90^{\circ}$; also, 8în. $\varphi = \frac{1}{V3}$, 8in. $\varphi' = \frac{1}{V2}$.

$$5 \quad \gamma = \frac{r}{V_5}, \ \gamma' = \frac{r}{V_5}, \quad x = r.$$

$$6) \qquad f = \frac{r^2 V \cdot 5}{\lambda}, \quad f' = r^2.$$

8) Inhalt beffelben
$$=\frac{5 r^3 V^2}{3}$$
.

Sin.
$$\frac{1}{4} = \frac{\sin \frac{54^{\circ}}{\sin \frac{1}{30^{\circ}}} \sin \frac{1}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{$$

Berfahrt man mit diesen benden Gleichungen wie im vorigen

Sin,
$$\underline{I} = V \frac{5 - V 5}{10}$$
.

2) Also Cos.
$$\frac{1}{2}\eta = V \frac{10 + 2V5}{16}$$
,

Sin.
$$\frac{1}{4}\eta = V \frac{6-2V_5}{16} = \frac{V_5-1}{4}$$
.

Sin.
$$\varphi = \frac{V_5 - 1}{2V_3}$$
, Sin. $\varphi' = V_{\frac{5 - V_5}{10}}$.

4)
$$y = x \frac{V_5 - 1}{2V_3}$$
, $y' = x V \frac{5 - V_5}{10}$,

$$x=r\frac{V_5-i}{2}.$$

5)
$$f = \frac{r^2 V_3}{16} (6-2V_5), f' = \frac{r^2 V_5}{8} V(10-2V_5).$$

$$\frac{5r^2V^3}{4}(6-2V5) + \frac{3r^2V^5}{2}V(10-2V5)$$

7) Inhalt deffelben =
$$\frac{11\sqrt{5-5}}{6}$$
 r?.

135

$$\sin \frac{1}{4}\theta' = \frac{\sin \frac{45^{\circ}}{\sin \frac{1}{30^{\circ}}} \sin \frac{1}{4}\theta \Rightarrow \sin \frac{1}{4}\theta \cdot \sqrt{2}$$

und baber

$$\sin \frac{1}{2} = \sin \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

oder, ba Sin. \(\frac{1}{2}\theta' = (4 \text{Cos. }\(\frac{1}{2}\theta^2 - 1) \text{Sin. }\(\frac{1}{2}\theta \) (\$ 129. 2),

Cos.
$$\frac{1}{3}\theta' = \frac{V(1+V^2)}{2}$$
, Sin. $\frac{1}{4}\theta = \frac{V(3-V^2)}{2}$.

2) Cos.
$$\frac{1}{4}\eta = V \frac{3 - V^2}{7}$$
, Sin. $\frac{1}{4}\eta = V \frac{4 - V^2}{7}$.

$$\sin \varphi = V \frac{16-4V^2}{21}$$
, $\sin \varphi = V \frac{8-2V^2}{7}$.

4)
$$y = r V \frac{16 - 4 V^2}{21}$$
, $y' = r V \frac{8 - 4 V^2}{7}$,

$$x = 2 r V \frac{4 - V^2}{7},$$

5)
$$f = \frac{r^2 V_3}{7} (4 - V_2), f' = \frac{4r^2}{7} (4 - V_2).$$

6) Oberfidche des Körp. =
$$\frac{8x^2}{7}(2 + V_3)(4 - V_2)$$
.

7) Inhalt beffelben ==

$$\frac{8r^{3}(4-V^{2})}{21V7}[V(5+4V^{2})+V(2V^{2}-1)]$$

$$=\frac{16r^{3}}{21V7}V(13+16V^{2}).$$

Die Reduktion des erften Ausdruckes auf den zwenten ger schiebes, auf folgende Art: Man quadrice den in den Rlams mern [...] einaeschloffenen Ebeil, so erhält man

 $4+6V^2+2V(1+6V^2)=10+8V^2$, weil $V(11+6V^2)=3+V^2$. Dieser Fattor ift also, nickte anders als $V(10+8V^2)$. Die weitere Bermandt Lung bedart keiner näheren Erkigrung.

- i) Berechnung bes gorpers IX. § 125.
- 1) hier ist m = 5, n = 4; p = 4, q = 1; x = 60°, x' = 90°; M = 52, N = 6. Man har atfo,

$$\sin \frac{1}{4} \theta' = \frac{\sin 45^{\circ}}{\sin 30^{\circ}} \sin \frac{1}{4} \theta = \sin \frac{1}{4} \theta \cdot \frac{1}{2};$$

 $\sin \frac{1}{4} \theta' = \sin 2\theta;$

woraus man erhalt,

Sin, 2 0 = Sin, 10. 1/2.

2) Es ift aber Sin. 1 = 2 Sin, 1 1 Cos. 1 1, Cos. 1 = 2 Cos 1 82 - 1, und daher,

Sin 2 4 = 2 Sin 4 4 Cos. 4 6 (2 Cos, 4 62 - 1).

Bird diefer Werch in der letten Gleichung in a fubstituirt, und hierauf durch 4 Sin. & o dividirt, so erhalt man die Gleich hung vom dritten Grade,

Cos.
$$\frac{1}{4} \theta^3 - \frac{1}{4} \text{ Cos. } \frac{1}{4} \theta = \frac{V^2}{4};$$

ober, wenn man Cos. $\frac{1}{4} = \frac{u}{V^2}$ fest, diefe,

Die Auflösung dieser Gleichung vermittelft ber Cardanischen

$$\mathbf{n} = V \frac{3 + 2V 69}{18} + V \frac{9 - 2V 69}{181}$$

welches bemnach ber einzige reelle Berth bes u ift.

5) Aus Diesem Werthe Des u laft fich auf die gewöhnlig che, nun icon hinlanglich befannte Beise, alles Uebrige fin ben, und durch blag algebraische Ausbrude bestimmen; die Formeln werden aber sehr verwidelt, und laffen teine bedeut tende Abfargungen gu; Dies ift ber Grund, warum fie hier übergangen werden.

\$ 137.

k) Berechnung bes Rorpers K. § 195.

Dier ift m = 3,1 n = 5; p = 4, q = 1; * = 60°, 4' = 108°; M = 80, N = 12. Man hat also,

Sin.
$$\frac{1}{4}\theta' = \frac{\sin .54^{\circ}}{\sin .30^{\circ}}$$
 Sin. $\frac{1}{4}\theta = \frac{1 + V.5}{2}$ Sin. $\frac{1}{4}\theta$,
Sin. $\frac{1}{4}\theta' = \sin .2\theta$.

Dieraus erhalt man, wenn wie im porigen & verfahren wird, Die Gleichung vom britten Grade,

Cos.
$$\frac{1}{8}\theta^3 - \frac{1}{8}\cos_4\frac{1}{8}\theta = \frac{1+V_5}{8}$$
.

woraus man vermittelft ber Carbanifden Formel einen reels len Berth von Cos. is erhalt. Das Uebrige wie gewöhnlich.

Es lift fic alfo auch biefer Rorper durch bloß algebraiiche Musbrude berechnen. 1) Berechnung bes Rorvers XI. § 125.

1) hier ist m = 4, n = 6; p'= 1, q = 2; * = 90°, w' = 120°; M = 6, N = 8. Man bat also,

Sin $\frac{1}{4} \theta' = \frac{\sin. \frac{60^{\circ}}{\sin. \frac{45^{\circ}}{16^{\circ}}} \sin. \frac{1}{4} \theta = \frac{1/3}{1/2} \sin. \frac{1}{4} \theta$

Sin. 0' = Sin. 1 1.

Die Divifion ber zwepten Glerchung burch bie erfte giebt? 2 Cos. $\frac{1}{2} = \frac{V^2}{V^3}$; also,

 $\operatorname{Cos}_{\frac{7}{4}}\theta'=\frac{1}{V6},\quad \operatorname{Sin}_{\frac{7}{4}}\theta'=\frac{V5}{V6}.$

2) Cos. $\frac{1}{4}\eta = \frac{\text{Cos. } 30^{\circ}}{\sin . \frac{1}{4} \text{ A}'} = \frac{3}{V_{10}}, \text{ Sin. } \frac{1}{4}\eta = \frac{1}{V_{10}}$

 $\alpha = 90^{\circ}$, $\alpha' = 60^{\circ}$; also, Sin. $\alpha = \frac{\sin \frac{1}{2} \pi}{\sin \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{V_5}$, Sin. $\alpha' = \frac{\sin \frac{1}{2} \pi}{\sin \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{V_2}{V_5}$

(4) $y = \frac{r}{V_5}$, $y' = \frac{rV^2}{V_5}$, $x = \frac{2r}{V_{10}}$.

 $f = \frac{2 r^2}{5}, \quad f' = \frac{3 r^2 \sqrt{5}}{6}.$

6) Oberfide des Korp. = 12 12 (1 + 21/3).

7) Inhalt deffelben = $\frac{32 \, \mathrm{r}^3}{5 \, \mathrm{V} 5}$.

m) Berechnung bes Körpeps XIII. § 196.

1) hier ift m = 5, n = 6; p = 1, q = 2; 2 = 108 2/ = 1200; M = 12, N = 20. Man bat also,

Sin,
$$\frac{1}{4}\theta' = \frac{\sin 60^{\circ}}{\sin 54^{\circ}} \sin \frac{1}{4}\theta = \frac{\sqrt{3 \cdot (\sqrt{5-1})}}{2} \sin \frac{1}{4}\theta$$

Sin. # = Sin. 1 &

Die Divifion ber amenten Gleidung burd die erfte giebt,

2 Cos.
$$\frac{1}{2}\theta' = \frac{2}{(V5-1)V3}$$
, worqus man erhált,
Cos. $\frac{1}{2}\theta' = \frac{V5+1}{4V3}$, Sin. $\frac{1}{4}\theta' = \frac{V(42-4V5)}{4V3}$.

2)
$$\cos_{1} \eta = \frac{\cos_{1} 30^{\circ}}{\sin_{1} \frac{1}{4} \theta'} = \frac{6}{V(42 - 2V_{0})}$$

Sin.
$$I_{7} = \frac{V(6-2V5)}{V(42-2V5)} = V^{\frac{29}{218}} = \frac{9V5}{218}$$

5)
$$\alpha = 72^{\circ}$$
, $\alpha' = 60^{\circ}$; also,

Sin.
$$\varphi = \frac{2V(25-4V5)}{V545}$$
, Sin. $\varphi' = \frac{2V(29-9V5)}{V248}$;

$$y = \frac{2 \text{ r} V(25 - 4V5)}{V 545}, \quad y' = \frac{2 \text{ r} V(29 - 9V5)}{V 218},$$

$$x = \frac{2r \mathcal{V}(29 - 9 \mathcal{V} 5)}{\mathcal{V}^{218}}.$$

5)
$$f = r^3 \frac{29 - 9V5}{218} V(25 + 10V5)$$

$$f' = 6 r^2 \frac{29 - 9V5}{218} \cdot V5$$

$$\frac{29-9V5}{209}x^{2}[6V(25+10V5)+60V5],$$

7) Inhalt beffelben =

$$\frac{58 - 18 V 5}{109 V^{109}} [V^{(2185 + 970 V 5) + 10} V^{(153 + 54 V 5)}].$$

X. Korper, welche von regularen Figuren breperlen Urt begrangt werden.

Ø 140, .

Aufg, Ein Rorper mit gleichen oder symmetrischen Winfeln wird von drey Arten von regularen Dielecken begrangt; die Vielecke an sich, nebst der Angabl derer von jeder Art, welche gur Bildung eines körperlichen Winkels erfordert werden, find gegeben; man soll für diesen Körper die Angahl der Ecken und Kanten, wie auch die Angahl der Grangstächen von jeder Art finden.

Aufl. 1) Der Körper werde von lede, mede, und nede begrangt; jeder torperliche Wintel werde von p Binteln bes erften, q Binteln bes sweyten, und r Binteln bes britten Bieled's gebilbet.

2) Die Winkel der Vielede find: $\frac{2l-4}{l}$ 90°, $\frac{2m-4}{m}$ 90°, $\frac{2n-4}{n}$ 90°. Die Summe der Winkel, von welchen jeder körperliche Winkel eingeschlossen wird, ist demnach = $p\frac{2l-4}{l}$ 90° $+ q\frac{2m-4}{m}$ 90° $+ r\frac{2n-4}{n}$ 90°.

5) Es fen nun B die Angahl der Eden des Korpers; fo muß man, um die Summe aller ebenen Binkel auf der Ober, flache beffelben zu finden, den hier gefundenen Ausbruck mit E multipliciren. Die Summe der Binkel ift aber auch = (4E - 8) 90° (§ 89); man hat also die Gleichung,

$$\left[p^{\frac{2l-4}{1}}go^{2}+q^{\frac{2m-4}{m}}go^{2}+r^{\frac{2m-4}{n}}go^{2}\right]E=(4E-8)go^{2};$$

morans man, menn

a pmn + 2 qln + 2rlm - lmn (p + q + r - 2) = Agefest wird,

$$\mathbf{E} = \frac{4 \, \mathrm{lmn}}{A}$$

erbalt,

- 4) Die Anzahl der Winkel von jeder Art auf der Obers fläche des Körpers ift pE, qE, rE; und da l Winkel von der erften, m Winkel von der zwenten, und n Winkel von der dritten Art ein Vieled geben, so geben die Ausdrücke $\frac{pE}{l}$, $\frac{qE}{m}$, $\frac{\pi E}{n}$, die Anzahl der Bielede von jeder Art.
- 5) Bezeichnet alfo L die Anzahl der leife, M die Anzahl ber mede, und N die Anzahl der nede, so ift,

$$L = \frac{4 \text{ pmn}}{A}$$
, $M = \frac{4 \text{ qln}}{A}$, $N = \frac{4 \text{ rlm}}{A}$

6) Die Summe affer ebenen Winkel auf ber Oberfiace bes Korpers ift = pE + qE + rE; und daber, wenn K die Angahl ber Kanten bezeichnet, (§ 81)

$$K = \frac{p+q+r}{s} E$$

\$ 141.

Aufg. Man foll die Bedingungen angeben, unter

$$\sin \frac{1}{2}\theta' = \frac{\sin 72^{\circ}}{\sin 70^{\circ}} \sin \frac{1}{2}\theta = \sin \frac{1}{2}\theta \cdot \frac{V(10 + 2V5)}{2}$$

Sin. 6' ,= Sin. & 6, und baber,

Sin.
$$\theta' = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \theta'}{V(10 + 2V5)} = \sin \frac{1}{2} \theta' \cdot V \frac{5 - V5}{10}$$

Hieraus erhalt man, ba Sin. ø = 2 Sin. F o' Cos. F o',

Cos.
$$\frac{1}{4}\theta' = V\frac{5-V5}{40}$$
, Sin. $\frac{1}{4}\theta' = V\frac{35+V5}{40}$.

2)
$$\cos \frac{1}{4}\pi = \frac{\cos 18^{\circ}}{\sin \frac{1}{4}\theta'} = V \frac{50 + 10 V \cdot 5}{70 + 2 V \cdot 5} = V \frac{86 + 15 V \cdot 5}{122}$$

Sin.
$$\frac{1}{2}\eta = V \frac{37 - 15V5}{122}$$
.

3)
$$\alpha' = 120^{\circ}$$
, $\alpha' = 36^{\circ}$; also,
 $\sin \varphi = \frac{\sin \frac{1}{2} \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{1}{2} \cos \varphi} = V \frac{74 - 30 V 5}{183}$.

$$\sin \varphi' = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \theta} = V \frac{7^2 - 16V5}{6!}$$

$$y = r \nu \frac{74 - 30 \nu 5}{r83}, y' = r \nu \frac{72 - 16 \nu 5}{61},$$

$$x = 2 r \nu \frac{37 - 15 \nu 5}{188}.$$

5)
$$f = \frac{r^2 V \hat{5}}{100} (37 - 15 V \hat{5}), \quad \dot{V} = 5 r^2 V \frac{26 r^2 - 1117 V \hat{5}}{6r^2}.$$

hieraus erhalt man nun ferner,

f) Berechnung bes görpers VI. § 125.

1) hier iff m = 3, n = 4; p = 2, q = 2; n = 60°, n/ = 90°; M = 8, N = 6; also,

Sin.
$$\frac{1}{2} \theta' = \frac{\text{Sin. 45}^{\circ}}{\text{Sin. 30}^{\circ}} \text{Sin. } \frac{1}{2} \theta = \text{Sin. } \frac{1}{2} \theta \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{2$$

2) Man bloddre die zwente Gleichung durch die erke; dies giebt, da Sin. 8' = 2 Sin. \ 8' Cos. \ 8', Sin. \ = 2 Sin. \ 8' Cos. \ 8',

$$\operatorname{Cos.} \frac{1}{4} \theta' = \frac{\operatorname{Cos.} \frac{1}{4} \theta}{V^2}.$$

Man quadrire fowohl diese, als die erfte Gleichung in 1, und abbire fie hierauf; dies giebt, da Cos. 4 6 2 + Sin. 4 6 2 = 1,

$$a = \frac{\cos \frac{1}{2} \theta^2}{\cos \frac{1}{2} + 2 \sin \frac{1}{2} \theta^2}$$

Mus diefer Gleichung erhalt man, wenn 1 - Sin, I de far Cos, I de gefest wird,

$$\sin \frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3) Daber ift

Cos.
$$\frac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos. }60^{\circ}}{\sin \frac{1}{2}\eta} = \frac{1/3}{2}$$
, $\sin \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}$

4)
$$\alpha = 120^{\circ}$$
, $\alpha' = 90^{\circ}$; also,
Sin. $\varphi = \frac{1}{V3}$, Sin. $\varphi' = \frac{1}{V2}$.

$$5 \quad y = \frac{r}{Vs}, \ y' = \frac{r}{Vs}, \quad x = r.$$

6)
$$f = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}, f' = t^2$$

8) Inhalt deffelben =
$$\frac{5 r^3 \sqrt{2}}{z}$$
.

.g) Berechnung bes Korpers VII. § 125.

Sin.
$$\frac{1}{4}\theta' = \frac{\sin \frac{54^{\circ}}{8in. \frac{1}{30^{\circ}}} \sin \frac{1}{4}\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sin \frac{1}{4}\theta$$

Sin. # == Sin. #:

Berfahrt man mit biefen benden Gleichungen wie im porigen

$$Sin, \frac{1}{4} \ell = V \frac{5 - V 5}{10}.$$

2) Miso Cos.
$$\frac{1}{4}\eta = V \frac{10 + 2V5}{16}$$
,

Sin.
$$\frac{1}{4}\eta = V \frac{6-2V_5}{16} = \frac{V^5 - 4}{4}$$
.

Sin.
$$\varphi = \frac{V_5 - 1}{2V_3}$$
, Sin. $\varphi' = V_{\frac{5-V_5}{10}}$.

4)
$$y = r \frac{V_5 - 1}{2V_3}$$
, $y' = r V \frac{5 - V_5}{10}$,
 $x = r \frac{V_5 - 1}{2}$.

5)
$$f = \frac{r^2 V_3}{16} (6 - 2V_5), F = \frac{r^2 V_5}{8} V (10 - 2V_5).$$

6) Oberfidde bes Korpers ==

$$\frac{5r^2V_3}{4}(6-2V_5) + \frac{3r^2V_5}{2}V(10-2V_5)$$

7) Inhalt deffelben = $\frac{11\sqrt{5} \rightarrow 5}{6}$ r3.

b) Berechnung des Rorpers VIII. § 125, für n = 4.

1) hier ift m = 3, n = 4; p = 3, q = 1; n = 60%, 2/=90°; M=8, N=2. Man hat also,

 $\sin \frac{1}{4} = \frac{\sin \frac{45^{\circ}}{\sin \frac{1}{20^{\circ}}} \sin \frac{1}{4} = \sin \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2}$

6in. I & = Sin. 2 1;

Sin. 1 = Sin. 1 1/2,und baber oder, da Sin. 1 0 = (4 Cos. 102 - 1) Sin. 10 (§ 129. 2),

- Cos. $\frac{1}{3}\theta' = \frac{V(1+V^2)}{2}$, Sin. $\frac{1}{3}\theta = \frac{V(3-V^2)}{2}$,
- Cos. $\frac{1}{4}\eta = V \frac{3 V^2}{2}$, Sin. $\frac{1}{4}\eta = V \frac{4 V^2}{2}$.

5) a = 1209, a' = 90°; allo, $\sin \varphi = V \frac{16-4V^2}{21}$, $\sin \varphi = V \frac{8-2V^2}{7}$.

4) $y = r V \frac{16 - 4 V^2}{21}$, $y' = r V \frac{8 - 2 V^2}{2}$ $x = 2 r V \frac{4 - V^2}{7},$

5) $f = \frac{r^2 V_3}{7} (4 - V_2), f' = \frac{4r^2}{7} (4 - V_2).$

6) Oberfläche des Körp. = $\frac{8r^2}{7}(2 + V_3)(4 - V_2)$

7) Inhalt beffelben ==

$$\frac{8r^{2}(4-V^{2})}{21V7}[V(5+4V^{2})+V(2V^{2}-1)]$$

$$=\frac{16r^{2}}{21V7}V(13+16V^{2}).$$

Die Reduktion des erften Ausdruckes auf den zwepten ger fcbieber, auf folgende Art: Dan quadrire den in ben Rlame mern [] einaefchloffenen Ebeil, fo erhalt man

 $4+6V^2+2V(1+6V^2)=10+8V^2$, weil $V(11+6V^2)=3+V^2$. Dieser Faktor ift also mickis anders als $V(10+8V^2)$, Die weitete Bermands lung bedart keiner näheren Erkigrung.

- i) Berechnung bes körpers IX. 6 125.
- 1) Hier ist m= 5, n= 4; p= 4, q= 1; n= 60%, n= 90%, M= 52, N= 6. Man bat atfo,

$$8in, \frac{1}{2} \theta' = \frac{8in, 45^9}{8in, 30^9} 8in, \frac{1}{2} \theta = 8in, \frac{1}{2} \theta \cdot \sqrt{2};$$

 $8in, \frac{1}{2} \theta' = 8in, 2\theta;$

woraus man erbalt,

2) Es ift aber Sin. | = 2 Sin. | Cos. | 4, Cos. | = 2 Cos. | 4 - 1, und daher,

Sin 24 = 2 Sin 14 Cas. 16 (2 Cos, 162 - 1).

Wird dieser Werch in der letten Gleichung in a substituirt, und hierauf durch 4 Sin. & dividirt, so erhalt man die Gleie hung vom dritten Grade,

Cos.
$$\frac{1}{4} \theta^3 - \frac{1}{4} \text{ Cos. } \frac{1}{4} \theta = \frac{V^2}{4};$$

oder, wenn man Cos. $\frac{1}{8} s = \frac{u}{V^2}$ fest, diefe,

Die Auftofung diefer Gleichung vermittelft ber Cardanifden

$$n = \sqrt[7]{\frac{9 + 2\sqrt{69}}{18} + \sqrt[7]{\frac{9 - 2\sqrt{69}}{181}}}$$

welches bemnach ber einzige reelle. Werth bes u ift.

3) Aus diesem Werthe des u laft fic auf die gewöhnlig che, nun icon hinlanglich befannte Weise, alles Uebrige fin den, und durch blag algebraische Ausdrude bestimmen; die Formeln werden aber sehr verwidelt, und laffen teine bedeur tande Abturgungen gu; dies ift der Grund, warum fie hier übergangen werden,

\$ 137.

. k) Berechnung bes Rorpers K. § 125.

Dier ist m = 3,, n = 5; p = 4, q = 1; * = 60°, 4' = 108°; M = 80, N = 12. Man hat also,

Sin.
$$\frac{1}{4}\theta' = \frac{\sin .54^{\circ}}{\sin .30^{\circ}}$$
 Sin. $\frac{1}{4}\theta = \frac{1 + 1/.5}{2}$ Sin. $\frac{1}{4}\theta_{1}$
Sin. $\frac{1}{4}\theta' = \sin .2\theta_{2}$

Dierans erhollt man, wenn wie im porigen f verfahren wird, Die Gleichung vom britten Grabe,

Cos.
$$\frac{1}{8}\theta^3 - \frac{1}{8}$$
 Cos. $\frac{1}{8}\theta = \frac{1 + V_5}{8}$.

worans man vermittelft der Cardanischen Formel einen reels len Berth von Cos. is erhalt. Das Uebrige wie gewöhnlich.

Es lagt fic alfo auch biefer Rorper burch bloß algebraiiche Musbrude berechnen. 1) Berechnung bes Körpers XI. 6

1) Berechnung des Körpers XI. § 125.

1) Hier ist m = 4, n = 6; p'= 1, q = 2; * = 90°, b' = 120°; M = 6, N = 8. Man hat also,

 $\sin \frac{1}{2} \rho' = \frac{\sin 60^{\circ}}{\sin 45^{\circ}} \sin \frac{1}{2} \rho = \frac{1/3}{\sqrt{2}} \sin \frac{1}{2} \rho.$

Sin. $\ell' = \sin . \downarrow \lambda$

Die Division der zwenten Gleichung burch bie erfte giebe:

 $2 \cos \frac{1}{4} v = \frac{V^2}{V^3}; \text{ also,}$

Cos. $\frac{1}{4} \theta' = \frac{1}{V6}$, Sin. $\frac{1}{4} V = \frac{V5}{V6}$.

2) Cos. $\frac{1}{4}\eta = \frac{\text{Cos. } 30^{\circ}}{\text{Sin. } \frac{1}{4} t'} = \frac{3}{V_{10}}$, Sin. $\frac{1}{4}\eta = \frac{1}{V_{10}}$

3) $\alpha = 90^{\circ}$, $\alpha' = 60^{\circ}$; also,

Sin. $\alpha = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}} = \frac{1}{V_5}$, Sin. $\alpha \ell = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}} = \frac{V_2}{V_5}$

(4) $y = \frac{r}{V_5}$, $y' = \frac{rV^2}{V_5}$, $x = \frac{2r}{V_{10}}$.

5) $f = \frac{2 r^2}{5}, f' = \frac{3 r^2 \sqrt{5}}{6}.$

6) Oberfidde des Korp. = \frac{12 \ r^2}{5} (1 + 2 \sqrt{3}).

7) Inhalt doffelben = $\frac{32 \, r^3 \, V_3}{5 \, V_5}$.

\$ 139.

m) Berechnung bes Körpeps XIII. § 196.

1) hier ist m = 5, n = 6; p = 1, q = 2; = 108°, 2' = 120°; M = 12, N = 20. Man hat also,

Sin.
$$\frac{1}{4}\theta' = \frac{\sin. 60^{\circ}}{\sin. 54^{\circ}} \sin. \frac{1}{4}\theta = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5-1})}{2} \sin. \frac{1}{4}\theta.$$

Sin, **#** = Sin. **4** &

Die Division ber zwepten Gleichung burch die erfte giebt, $2 \cos \frac{1}{4} = \frac{2}{(V5-1)V3}$, worque man erhalt,

Cos.
$$\frac{1}{2}\theta' = \frac{V_5 + 1}{4V_3}$$
, Sin. $\frac{1}{4}\theta' = \frac{V(42 - 6V_5)}{4V_3}$.

2) Cos.
$$\frac{1}{3}\eta = \frac{\cos_3 30^\circ}{\sin_3 \frac{1}{3} \delta'} = \frac{6}{\nu (42 - 2\nu 5)}$$
.

Sin.
$$I_7 = \frac{V(6-2V5)}{V(42-2V5)} = V\frac{29-9V5}{218}$$

5)
$$\alpha = 72^{\circ}$$
, $\alpha' = 60^{\circ}$; also,

Sin.
$$\varphi = \frac{2V(25-4V5)}{V545}$$
, Sin. $\varphi' = \frac{2V(29-9V5)}{V^{218}}$;

$$y = \frac{2rV(25-4V5)}{V545}, \quad y' = \frac{2rV(29-9V5)}{V218},$$

$$2rV(29-9V5)$$

$$\mathbf{x} = \frac{2\mathbf{r}\,\mathcal{V}(29-9\,\mathcal{V}5)}{\mathcal{V}^{218}}.$$

5)
$$f = r^2 \frac{29 - 9V5}{218} V(25 + 10V5)$$

$$f' = 6 r^2 \frac{29 - 9V5}{218} \cdot V5$$

$$\frac{29-9V5}{209}r^{2}[6V(25+10V5)+60V5],$$

7) Inhalt beffelben =

$$\frac{58-18V5}{109V109}[V(2185+970V5)+10V(153+54V5)].$$

X. Korper, welche von regularen Figuren breperlep Art begrängt werben.

· § 140, `

Aufg. Ein Körper mit gleichen oder symmetrischen Winkeln wird von drey Arten von regularen Vieleden begrangt; die Vielede an sich, nebst der Anzahl derer von jeder Art, welche zur Bildung einen körperlichen Winkels erfordert werden, find gegeben; man soll für diesen Körper die Anzahl der Eden und Kanten, wie auch die Anzahl der Grangstächen von jeder Art finden.

Aufl. 1) Der Korper werbe von lede, mede, und nede begrangt; jeder korperliche Binkel werde von p Binkeln bes erften, q Binkeln bes sweyten, und r Binkeln bes britten Bieled's gebilbet.

2) Die Winkel der Vielecke sind:
$$\frac{2^1-4}{1}90^\circ$$
, $\frac{2m-4}{m}90^\circ$, $\frac{2m-4}{m}90^\circ$. Die Summe der Winkel, von welchen seder körperliche Winkel eingeschlossen wird, ist demnach = $p\frac{2^1-4}{1}90^\circ+q\frac{2m-4}{m}90^\circ+r\frac{2^n-4}{n}90^\circ$.

5) Es fen nun E die Angabl ber Eden bes Korpers; fo muß man, um die Summe aller ebenen Binkel auf der Obers fidche bestelben gu finden, den bier gefundenen Ausbruck mit E multipliciren. Die Summe der Binkel ift aber auch = (4 E - 8) 90° (5 89); man hat also die Gleichung,

$$\left[p^{\frac{2l-4}{l}}go^{\alpha} + q^{\frac{2m-4}{m}}go^{\alpha} + r^{\frac{2m-4}{n}}go^{\alpha}\right]E = (4E-8)go^{\alpha};$$

worque man, menn

2 pmn + 2 qln + 2 rlm - lmn (p + q + r - 2) = A
gefegt wird,

$$\mathbf{E} = \frac{4 \, \mathrm{lmn}}{\mathrm{A}}$$

erhalt,

- 4) Die Anzahl der Winfel von feder Art auf der Oberstäde des Körpers ift pE, qE, rE; und da 1 Winfel von der ersten, m Winfel von der zwenten, und n Winfel von der dritten Art ein Vieled geben, so geben die Ausdrücke $\frac{pE}{l}$, $\frac{qE}{m}$, $\frac{\pi E}{n}$, die Anzahl der Bielede von jeder Art.
- 5) Bezeichnet also L die Anzahl der leife, M die Anzahl ver mede, und N die Anzahl der nede, so ift,

$$L = \frac{4 \text{ pmn}}{A}$$
, $M = \frac{4 \text{ qln}}{A}$, $N = \frac{4 \text{ rlm}}{A}$

6) Die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche bes Körpers ift = pE + qE + rE; und daher, wenn K die Angahl der Kanten bezeichner, (f 81)

$$K = \frac{p + q + r}{2} E,$$

\$ 141.

Aufg. Man foll die Bedingungen angeben, unter

welchen ein Körper von dreverley regulären Vielecken be granzt werden kann, wenn alle feine Winkel gleich oder fymmetrisch seyn sollen.

- Aufl. 1) Da der Körper von dren Arten von Bieleden begrant werden foll, so muß auch feder torperliche Wintel pon eben so vielen Arten von Polygonwinteln begrangt werden.
- 2 Die größten von den Bieleden, welche einen körperlischen Bintel begrangen, konnen nicht weniger als Funfede fenn, weil die benden anderen Arten nicht weniger als Quas brate und Drenecke senn konnen.
- 3) Bon den größten Vielecken kann fich nur eines in jesdem körperlichen Winkel finden. Ift namlich das größte Viels ed ein Fünfeck, so beträgt jeder seiner Winkel 108°, und ein solcher Winkel kann nicht mehr als einmal in jedem körperlichen Winkel vorhanden senn; denn waren ihrer zwen vorhanden, so würde, da doch nicht weniger als ein Winkel von 100° und einer von 60° hinzusommen kann, die Summe der Winkel schon dadurch größer als 360° werden; um so weniger kann also ein Vieles von mehr als 5 Seiten, wenn es das größte seyn soll, mehn als einmal in jedem körperlichen Winkel vorhanden seyn,
- 4) Die kleinsten von den Bieleden, welche einen körperlie den Binkel begrangen, konnen bochftens Nierede senn; denn waren es auch nur Funsede, und ware auch nur ein solches in jedem körperlichen Binkel vorhanden, so könnte zu ihm nichts anders als ein Sechsest und ein Siebeneck hinzukommen, weit sonft die Summe der Binkel größer als 360° sewn wurde; diese Berbindung eines Junieds, Sechseds und Siebenecks zu einem körperlichen Binkel kann aber wegen § 122 Bus. nicht fatt sinden. Die kleinste Art von Bieleden, wel-

de einen Berperlichen Bintel begränzen, tann alfn nur aus Drenecken ober Bierecken besteben.

- 5) Das kleinste von den Bieleden, welche einen körperlichen Winkel begrangen, kann in demselben höchkens zweymat worhanden seyn: denn wenn es auch nur ein Orened mare, so wurden dren Winkel bestelben schon 1800 ausmachen, und es mußten also die übrigen Winkel weniger als 1800 betragen, welches unmöglich ift.
- 6) Das Bieled ber mittleren Art tann ebenfalls bochtens nur zwenmal vorhanden fenn; benn ift es auch nur ein Quasbrat, so murden dren Wintel beffelben schon allein 270° bestragen.
- 7) Sind nun querft die Bielede der Kleinsten Art, welche einen körperlichen Winkel einschließen, Orenecke, so muß es unter den übrigen zwen gleiche Bielede geben (§ 122 Jus.); und da dies ben den Bieleden der größten Art nicht flatt fin, den kann (3), so muß es zwen gleiche Bielede von der mittelern Art geben, und diese können nichts anders als Quasdrate senn.
- 8) Es tonnen aber zwen Quadrate nur mit einem Drepe ede verbunden werden; denn fur zwen Drepede mare die Summe der Bintel icon 3000, und es wurde also fur die dritte Art nichts übrig bleiben. Ein Dreped und zwen Quas brate laffen aber fur die britte Art nichts anders als ein Kunfed zu.
- 9) Es kann also einen Körper geben, worin jeder körperstiche Winkel von einem Orenecke, zwen Quadraten und einem Funfecke begränzt wird; ob es wirklich einen solchen glebt, muffen die Formeln des vorigen S's zeigen. Man sepe also 1 = 3, m = 4, n = 5, p = 1, q = 2, r = 1; dies giebt, A = 4, und demnach,

E=60, L=20, M=30, N=12, K=19a. Da hier für E, L, M, N, K, lauter endliche gange und possitive Zahlen gefunden worden, so ift der Körper möglich. Es giebt also nur einen Körper für die Boraussegung, daß die Bielede ber kleinften Art Orenede senen.

- 10) Rimmt man ferner an, bie Bielede ber kleinften Art waren Quadrate; fo ift erklich klar, daß der korperliche Binstel nicht von swen berfelben begrangt werden tann; benn wenn auch nur ein Kunfed und ein Sechsed hinzukommt, so beträgt die Summe ber Aldchenvinkel schon mehr als 360°.
- 11) Es bleibt also nur die Boraussetzung übrig, daß die Bielecke der kleinsten Art Quadrate seven, und daß seder körs perliche Binkel nur von einem derfelden begranzt werde. Best Dieser Boraussetzung kann in sedem körperlichen Binkel nur ein Bieleck der mittlern Art vorhanden senn; und dieses kann entweder ein Fünseck, oder ein Sechseck, oder ein Siedenkelk, voer ein Achteck senn; hödere Bielecke können nicht zugelaffen werden, weil sonft die Summe aller Flächenwinkel gkößer als 360° ware, das Bieleck der deitten Art sen welches es wolle. Diervon ift aber das Jänseck und Siedeneck wegen g 122 Justausgeschlossen; es bleibt also nur das Sechseck und Achteck übrig. Diervon muß aber wieder das Achteck ausgeschlossen werden, weil sonft das Vieleck der größten Art kleiner als ein Achteck senn mußte.
- 12) Bu einem Quadrate und einem Sechede tann, als Bieled von der größten Art, nur ein 7, 8, 9, 20, oder 11ed hinzufommen. Hiervon find aber das 7, 9, und 11ed, wegen f 122 Bus. ausgeschloffen. Es bleibt also nur das Achted und Zebened übrig.
- 13) Sest man querft 1 = 4, m = 6, n = 8, p = 1, q = 1, r = 1, fo ethilt man A = 16, unb

E = 48, L = 12, M = 8, N = 6, K = 72. Sett man aber n = 10, und behalt die vorigen Werthe von 1, m, ben, so findet man A = 8, und baber,

E = 120, L = 30, M = 20, N = 12, K = 180. $\frac{1}{2}$

Es find also nur breit Körper mit drenerlen regularen Figuren und gleichen ober sommetrischen körperlichen Winkeln möglich, und diefe find i

- I. Ein Körper, welcher von 20 Orenecken, 30 Quadraten und 12 Fanfeden begranzt wird. Er hat 60 Eden und 120 Kanten. Jeber körperliche Winkel wird von einem eber nen Winkel von 60°, zwen von 30°, und einem von 108° bet granzt. Das Neg zeigt Kig. 58; es wird zwenmal gemacht, und das zwentemal werden die mit Diagonalen durchzogenen Quadrate weggelaffen.
- II. Ein Körper, welcher von 12 Quadraten, 8 Sechseden und 6 Achteden begrangt wird. Er bat 48 Eden und 72 Kanten. Jeder torperliche Winkel wird von einem ebenen Winkel von 900, einem von 1200, und einem von 135° einges schloffen. Das Ney zeigt Fig. 59.
- III. Ein Rerper, welcher von 30 Quadraten, 20 Seches eden und 12 Zehneden begränzt wird. Er hat 120 Eden und 180 Kanten. Jeder Wintel wird von einem Wintel von 90°, einem von 120°, und einem von 144° eingeschlossen. Das Netz zeigt Fig. 60; es wird zweymal gemacht, und das zwenz bemal werden die mit Diagonalen durchzogenen Quadrate weggelassen.

\$ 143.

Aufg. Ein körperlicher Winkel, welcher von p flåt chenwinkeln, jeder = a, von q flachenwinkeln, jeder = a", einger

schlossen wird, ift innerhalb einer Angel von einem geget benen Salbmesser = r so gesent worden, daß seine Spine die Augelstäche berührt, und alle seine Scheutel einander gleich werden: man soll die jenen ebenen Winteln *, *, *, *, *, torrewondirenden spharischen Wintel, wie auch die Größe der gleichen Schentel sinden.

- Aufl. 1) Denkt man fic durch jeden Schenkel des körperlichen Binkels Bogen größter Kreise gelegt, so entstelhen rings um den Endpunkt, p + q + r sphartiche Binkel drepers ten Art, die durch 0, 0', 0'', bozeichnet werden sellen, so daß dem Binkel 2, 0' dem Binkel 2', und 0'' dem Binkel 2'' korrespondirt. Denkt man sich ferner die Endpunkte der gleis den Schenkel des körperlichen Winkels durch gerade kinien verbunden, so entsteben p + q + r ebene gleichschenkelige Dreys ecke, denen eben so viele spharische auf der Lugsisische ents sprechen.
- 2) Bezeichnet man bie gleichen Schenkel ber erwähnten spharischen Drenede durch n, so ift nach § 57,

Sin.
$$\frac{1}{2} \approx \text{Cos.} \frac{1}{2} \eta$$
 Sin. $\frac{1}{2} \alpha' = \text{Cos.} \frac{1}{2} \eta$ Sin. $\frac{1}{2} \alpha'' = \text{Cos.} \frac{1}{2} \eta$ Sin. $\frac{1}{4} \alpha'' = \text{Cos.} \frac{1}{4} \eta$ Sin. $\frac{1}{4} \alpha'' = \text{$

5) Aus diefen Gleichungen erhalt man durch die Eliminis rung des Cos. į n die folgenden;

4) Da ferner die Summe aller spharifden Bintel rings um ben Edpunkt = 360° fenn muß, so hat man auch noch bie Gleichung,

C) ...
$$p\theta + q\theta' + r\theta'' = 360^{\circ}$$
.

6) Man bat also swiften ben Winteln e, b', s", bren Gleis

Steichungen, von beren Auflofung Die Beftimmung berfelben abfangt. Man erhalt aber que der Gleichung G,

und diefes giebt,

aber,

'Sin. I q & Cos. I re" + Cos. I q &" Sin, I re" = Sin, I p &

- 6) Hier mußte man nun, wenn man die Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit auflösen wollte, die Sinuse und Rossinusse der vielsuchen Bogen & qo' = q × & o', & ro'' = x × & o', & po = x × & o, durch die Sinusse über einfachen & o', & o', & o, ausdrücken, und hierauf für Sin. & o', Sin. & o', ihre Werthe aus den Gleichungen A, B, substituten. Man würde alsdann eine Gleichung erhalten, worin bloß Potenzen von Sin. & o und bekannte Größen vorkommen, und es würde also bloß auf die Ausschlung einer algebraischen Gleichung aus kommen. Go aufgelöst gehört die Aufgabe in die Goniomertrie, wie schon S 126. 5 ben einer ahnlichen Gelegenheit bes merkt worden; hier wird es hinreichen, die Anwendung nur auf einige besondere Falle zu machen.
 - 7) Ift einer von den Winkeln 8, 6', 6', 6', gefunden, so ers balt man auch n aus einer von den brey Gleichungen in 2; Diese geben namlich,

Cos.
$$\frac{1}{2}\eta = \frac{\sin \frac{1}{2}\pi}{\sin \frac{1}{2}\theta}$$
, Cos. $\frac{1}{2}\eta = \frac{\sin \frac{1}{2}\pi'}{\sin \frac{1}{2}\theta'}$,

Cos. $\frac{1}{2}\eta = \frac{\sin \frac{1}{2}\pi'}{\sin \frac{1}{2}\theta'}$.

8) 3ft 7 gefunden, so hat man auch die Schenkel des tors perlichen Wintels; wird namlich dieser = x gefest, so ift,

Aufg. Der Salbmeffet einer Augel, in welcher Die in § 142 aufgeführten Körper beschrieben find, ift gegerben: man foll allgemeine Ausdrucke für die Gröffe ihrer Banten, ihrer Branglachen, ihrer Oberfläche, ihres kubisschen Inhalts, und für den Salbmeffer des um jede Brangfiglichen Kache beschriebenen Kreises finden.

Auft. 1) Wenn bas, was im vorigen & von den in der Lugel gesetzen körperlichen Winfeln gesigt worden, auf die Eden bes zu berechnenden Körpers angewendet wird, und die Buchftaben 2, 2/, 2//, 0, 0', 0//, die ihnen daseloft bengetege ten Bedeutengen behalten, so hat man die dren letteren Winstell aus den dren ersteren vermittelft der Gleichungen,

2) Ift einer von den Binteln e, e', e'', gefunden worsben, so hat man auch n, vermittelft einer von den dren Gleir hungen, (\$ 143. 7)

Cos.
$$\frac{1}{2}\eta = \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}\theta}$$
, Cos. $\frac{1}{2}\eta = \frac{\sin \frac{1}{2}x'}{\sin \frac{1}{2}\theta'}$,

Cos. $\frac{1}{2}\eta = \frac{\sin \frac{1}{2}x''}{\sin \frac{1}{2}\theta''}$.

3) Die Rante bes Rorpers fen = x, (fie ift nichts ans bers als bas, was im vorigen & ber Schenkel bes torperlichen Winkels war), fo hat man,

4) Ein Perpenditel aus dem Mittelpuntte der Lugel auf eines der, den Rorper begrangenden, Bielede herabgelaffen, gebet durch den Mittelpuntt beffetben, und trifft verlangert den

Bol, des um ihn beschriebenen Reeises. Die Bogen gwischen biefem Bole und den Eden des geradlinigen, oder, welches das Ramliche ift, ben Eden des sparifchen Bieleds, sollen respettive fur das Led, med, und ned, durch q, q', q'', bezeichnet merden, und die Binkel, welche jede zwen zunachkt liegenden rings um den Bol einschließen, durch a, a', a'', so

hat man,
$$\alpha = \frac{360^{\circ}}{1}$$
, $\alpha' = \frac{560^{\circ}}{m}$, $\alpha'' = \frac{360^{\circ}}{n}$,

$$\sin \varphi = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \alpha}, \quad \sin \varphi' = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \alpha'}$$

$$\sin \varphi'' = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \alpha'} (\$ 57. 4).$$

5) Die halbmeffer ber um das led, med und ned ber schriebenen Kreise find die Sinuffe ber Bogen φ, φ', φ". Bezeichnet man also diese halbmeffer burch y, y', y", fo hat man,

$$y = r \sin \varphi$$
, $y' = r \sin \varphi'$, $y'' = r \sin \varphi''$.

6) Bezeichnet man ferner den respektiven glacheninhals bes Lecks, meds und necks durch f, f', f'', so hat man,

$$f = \frac{1}{2} \ln V(y^2 - \frac{1}{4}x^3), \quad f' = \frac{1}{2} \max V(y'^2 - \frac{1}{4}x^3),$$

 $f'' = \frac{1}{4} \max V(y''^2 - \frac{1}{4}x^3).$

- 7) Hieraus erhätt man ferner die Oberfiche des Körpers
 LE + MC + NC.
 - 8) Den kabilchen Inhalt defielben = {Li V(r2-y2) + {Mf' V(r2-y2) + {Ni'V(r2-y22)}.

Es bleibt nun nur noch übrig, Diefe formeln auf die Berechnung ber Rorper S 14º angurbenben. a) Berechnung bes Körpers I. § 144.

1) Jur biefen Körper iff 1 = 3; m = 4, h = 5; p = 1, q = 2, r = 1; % = 60°, & = 90°, 20° = 108°; L = 20, M = 30, N = 12: Man hat also auß 1 y 144 bie folgen. ben bren Gleichungen:

Sin. 30° Sin. 46' = Sin. 46° Sin. 46, Sin. 30° Sin. 46" = Sin. 54° Sin. 46, Sin. 6' Cos. 4" + Cos. 6' Sin. 46" = Sin. 46.

2) Aus ben benben erften erhalt man,

$$\sin \frac{1}{4} = \sin \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$$
, $\sin \frac{1}{4} = \frac{1+1/5}{4} \sin \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

Der dritten Gleichung tann man diefe Form geben,

$$2 \sin_{\frac{1}{2}} \theta' \cdot \cos_{\frac{1}{2}} \theta' \cdot \cos_{\frac{1}{2}} \theta'' + (1 - 2 \sin_{\frac{1}{2}} \theta'^2) \cdot \sin_{\frac{1}{2}} \theta''$$

$$= \sin_{\frac{1}{2}} \theta,$$

welche fic, wenn für Sin. I &, Sin. I &, ihre fo eben gefuns benen Werthe substituter, und durch Sin. I dividire wied, in die folgende verwandeler:

$$2V_{2}$$
, $Cos, \frac{1}{4}$, Co

3) Man quadrire, was sich auf benden Seiten des Sleitsbeitsgeschens besindet, und setze 1— Sin. I d'?, 1—Sin. I d'/2
für Cos. I d'², Cos. I d'/2, hierdurch entstehet die Bleichung,
6 (1—Sin. I d'²) (1—Sin. I d'/2) = (6+2V5) Sin. I d' +

(V5+1) Sin. I d² + 7—3V5;

oder, wenn man fur Sin, I d', Sin, I d' ihre Werthe aus a

fest, und das, was fic aufhebt, auf berben Seiten wegger laffen wirb, bie Sleichung vom zwenten Grabe,

$$8-(19+1/5) \sin \frac{1}{4} = (1/5-1) \sin \frac{1}{4} + \frac{7-31/5}{8};$$

und diefe giebt,

Sin.
$$\frac{1}{4} = V \frac{249 - 15V5}{608}$$
.

4) hieraus erhalt man nun,

$$\cos \frac{1}{4} = \frac{\sin \frac{1}{4}x}{\sin \frac{1}{4}} = V \frac{152}{249 - 15V5} = V \frac{37848 - 1880V5}{60876}$$

Sin.
$$\frac{1}{4}\eta = V \frac{23028 + 1880 V 5}{60876} = V \frac{5757 - 470 V 5}{15^{219}}$$
.

5) Sest man ben für Sin. In gefundenen Ausbruck, ber Rarge wegen, = a, fo ift (§ 144- 5)

Sin.
$$\varphi = 4a$$
, Sin. $\varphi' = aV2$, Sin. $\varphi'' = aV\frac{10+2V5}{5}$.

6)
$$y = 2\pi r$$
, $y' = \pi r \sqrt{2}$, $y'' = \pi r \sqrt{\frac{10 + 21/5}{5}}$,

7)
$$l = 5 x^2 r^2 V 5$$
, $l' = 4 x^2 r^2$, $l'' = x^2 r^2 V (25 + 10 V 5)$.

9) Inhalt deffelben ==

$$\frac{20}{3} \text{fr} V(1-4a^2) + 10f'r V(1-2a^2) + 4f''r V \left[1 - \frac{a^2(10+2V5)}{.5}\right]$$

b) Berechnung bes Rorpers II. \$ 142.

1) Für diesen Körper ift 1:= 4, m = 6, n = 8; p = q = r = 1; *= 90°, 2' = 120°, 2'' = 135°; L = 12, M = 8, N = 6. Man hat also, da

$$\sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{V^2}$$
, $\sin \frac{\pi}{2} = \frac{V_3}{2}$,

Sin. $\frac{1}{4}x'' =$ Sin. 67° 30′ = Cos. 22° 30′ = $\frac{V(2+V2)}{8}$

die folgenden dren Gleichungen (§ 144. 1):

$$\frac{1}{V^2} \sin \frac{1}{2} \theta' = \frac{V^3}{2} \sin \frac{1}{2} \theta,$$

$$\frac{1}{V^2} \sin \frac{1}{2} \theta'' = \frac{V^2 + V^2}{2} \sin \frac{1}{2} \theta,$$

 $\sin \frac{\pi}{4} \theta' \cos \frac{\pi}{4} \theta'' + \cos \frac{\pi}{4} \theta' \sin \frac{\pi}{4} \theta'' = \sin \frac{\pi}{4} \theta_0$

2) Aus den erften benden Gleichungen erhalt man

Sin
$$\frac{1}{4}\theta' = \frac{V^6}{2} \sin \frac{1}{4}\theta_1 \sin \frac{1}{4}\theta'' = \frac{V(4+2V^2)}{2} \sin \frac{1}{4}\theta_1$$

oder, wenn man, der Kärze wegen, $\frac{V^6}{2} = e$, $\frac{V(4+2V^2)}{2} = e^t$ fest,

Sin. & 0' = e Sin. & 0, Sin. & 0" = e' Sin. & 0,

Cos & 0' = V(1 - e^2 Sin. & 0^2), Cos. & 0' = V(1 - e'^2 Sin. & 0^2).

Berden biefe Berthe in der dritten Gleichung in 2 substituirt, und durch Sin. & 0 dividirt, so erhalt man,

 $eV(1-e^{t^2} \sin \frac{1}{4}\theta^2) + e^tV(1-e^2 \sin \frac{1}{4}\theta^2) = 1.$

Die Auflofung Diefer Gleichung giebt,

Sin.
$$\frac{1}{4} = V \left[1 - \frac{(e^2 +)e^{/2} - (1)^2}{4e^2 e^{/4}} \right].$$

Sest man nun wieder für e, et "ihre Beribe, fo erhalt man nach der gehörigen Reduktion,

$$\sin \frac{1}{4} = V \frac{14 - Va}{24}.$$

3) Ferner,

Cos.
$$\frac{1}{2}\eta = V \frac{84 + 6V^2}{47}$$
, Sin. $\frac{1}{2}\eta = V \frac{15 - 6V^2}{97}$.

4) Da $a = 90^{\circ}$, $a' = 60^{\circ}$, $a'' = 45^{\circ}$, $6 \cdot 16$,

Sin.
$$\varphi = V \frac{26 - 12V^2}{97}$$
, Sin. $\varphi' = 2V \frac{13 - 6V^2}{97}$,

Sin,
$$p'' = \sqrt{\frac{28 + 2\sqrt{2}}{97}}$$
.

5) Man hat also,
$$y = rV \frac{26 - 12V^2}{97}$$
, $y' = 2rV \frac{13 - 6V^2}{97}$

$$y'' = rV \frac{26 + 2V^2}{97}, \quad x = 2rV \frac{13 - 6V^2}{97}$$

$$97 = 1\sqrt{\frac{97}{97}}, \quad 1 = 1\sqrt{\frac{97}{97}}$$

$$6) \quad 1 = \frac{5^2 - 24\sqrt{2}}{97} r^2, \quad 1' = \frac{13 - 6\sqrt{2}}{97} 6r^2\sqrt{3}$$

$$f'' = 8 \frac{V(99 + 14V^2)}{97} r^2 = \frac{8 + 56V^2}{97} r^3$$

8) Impalt deffelden =
$$4 \text{ fr} V \frac{7^{1} + \frac{12}{5}V^{2}}{97} + \frac{8}{5} \text{ fr} V \frac{45 + \frac{24}{5}V^{2}}{97} + \frac{2f''r}{5}V \frac{69 - \frac{2}{5}V^{2}}{97}$$

5 1475

o) Berechnung bes Rörpers HI. 6 149,

1) Fit diesen Körper ist 1 = 4, m = 6, n = 163! p = 1, q = 1, x = 1; x = 90°, x' = 120°, x'' = 144°; L = 30, M = 20, N = 12. Man hat also, wenn für Sin. § 2, Sin. § 2', sin. § 2'', in § 144. 1', ihre Werthe gesett werden, die folgenden dren Gleichungen:

$$\frac{1}{V^2} \sin \overline{1} e^{\frac{1}{4} \left(\frac{10}{4} + \frac{2V_5}{4} \right)} \cdot \sin \overline{1} e^{\frac{1}{4}}$$

Sin, I 4' Cas. I 4' + Cas. I d' Sin. I 4" = Sin. I 4.

2) Wenn man, der Kurge wegen, $\frac{V(5+V5)}{2}$ = 0/

fest, fo findet man aus den benden erften Gleidungen,

Sin. I'd' = e Sin. Ie, Sin. Id" = e' Sin. Ie, Cos Id = V(1-e' Sin. Id'), Cos. Id" = V(1-e's Sin Id'). Berden diese Berthe in der dritten Gleichung subfituire und burch Sin. Is dividire, so erhalt man,

 $eV(1-e^{t^2}\sin \frac{1}{2}\theta^2) + e^tV(1-e^2\sin \frac{1}{2}\theta^2) = 1$, und hieraus,

Sin.
$$\frac{1}{4}\theta = V \left[1 - \frac{(e^2 + e^{/2} - 1)^2}{4 e^2 e^{/2}} \right];$$

und wenn wieder für e, et, ihre Berthe gefest werben,

Sin.
$$\frac{1}{2} \theta_0 = \sqrt{\frac{35 - 2\sqrt{5}}{60}}$$
.

3) Allo,

Cos.
$$\frac{1}{2}\eta = V^{\frac{210+12V5}{241}}$$
, Sin. $\frac{1}{2}\eta = V^{\frac{51-12V5}{241}}$.

- 4) a = 90°, a' = 60°, a' = 36°; alfo,
- Sin. $\varphi = V \frac{62 24V5}{241}$ Sin. $\varphi' = 2V \frac{31 12V5}{241}$

$$\sin \varphi'' = V \frac{66 - 10 V 5}{241}$$

5) Demnach ift,

$$y = xV \frac{62 - 24V5}{241}, y' = 2xV \frac{51 - 12V5}{241}$$

$$y'' = xV \frac{66 - 10V5}{241}, x = 2xV \frac{31 - 12V5}{241}.$$

6)
$$f = \frac{(31-12V5)}{241} 4x^2$$
, $f' = \frac{31-12V5}{241} 6x^2V3$

$$f'' = \frac{10 \, r^2}{241} \, V(965 - 558 \, V.5).$$

schlossen wird, ift innerhalb einer Angel von einem geges benen Salbmesser = r so gesegt worden, daß seine Spige die Augelstäche berührt, und alle seine Scheutel einander gleich werden: man soll die jenen ebenen Winteln *, *, *, *, *, *, torrespondirenden spharischen Wintel, wie auch die Größe der gleichen Schenkel sinden.

- Aufl. 1) Denkt man fic durch jeden Schenkel des körsperlichen Wintels Bogen größter Kreise gelegt, so entstehen rings um den Endpunkt, p + q + x sphartiche Wintel drepers Len Art, die durch 0, 0', 0'', bozeichnet werden sellen, so daß dem Wintel 2, 0' dem Wintel 2', und 0'' dem Wintel 2''
 Forrespondirt. Denkt man sich ferner die Endpunkte der gleischen Schenkel des körperlichen Wintels durch gerade Linien verbunden, so entstehen p + q + x ebene gleichschenkelige Dreys ecke, denen eben so viele spharische auf der Augelsiche ents sprechen.
- 2) Bezeichnet man bie gleichen Schenket ber erwähnten fpfidrischen Drepede durch n, so ift nach § 57,

Sin.
$$\frac{1}{2} \approx \cos \frac{1}{2} \tau$$
, Sin. $\frac{1}{2} \theta$, Sin. $\frac{1}{2} \alpha' = \cos \frac{1}{2} \eta \sin \frac{1}{2} \theta'$, Sin. $\frac{1}{2} \alpha'' = \cos \frac{1}{2} \eta \sin \frac{1}{2} \theta''$,

3) Aus diefen Gleichungen erhalt man durch die Eliminis rung des Cos. i n die folgenden;

4) Da ferner die Summe aller fpharifchen Binkel tings um den Eckpunkt = 360° fenn muß, fo bat man auch noch die Gleichung,

C) ...
$$p\theta + q\theta' + r\theta'' = 360^{\circ}$$
.

6) Man hat also swiften den Winteln e, e', e", bren Gleie

Sleichungen, von beren Auflofung Die Beftimmung berfelben abbangt. Man erhalt aber que ber Gleichung G,

und diefes giebt,

ober,

Sin. 1 q 8' Cos. 2 r 8" + Cos. 2 q 8" Sin, 2 r 8" = Sin, 2 p 8.

- - 7) Ift einer von ben Winkeln 0, 6', 6'', gefunden, fo ers balt man auch n aus einer von ben brev Gleichungen in 2; Diefe geben namlich,

Cos.
$$\frac{1}{2}\eta = \frac{\sin \frac{1}{2}\pi}{\sin \frac{1}{2}\theta}$$
, Cos. $\frac{1}{2}\eta = \frac{\sin \frac{1}{2}\pi'}{\sin \frac{1}{2}\theta'}$.

Cos. $\frac{1}{2}\eta = \frac{\sin \frac{1}{2}\pi'}{\sin \frac{1}{2}\theta'}$.

8) 3ft 7 gefunden, fo hat man auch die Schenkel des tors perlichen Bintels; wird namlich diefer = x gefest, fo ift,

Aufg. Der Salbmeffet einer Augel, in welcher bie in § 142 aufgeführten Korper beschrieben find, ift gegerben: man foll allgemeine Ausbrucke für bie Groffe iheer. Kanten, ihrer Grangstächen, ihrer Oberfläche, ihres kubisschen Inhalts, und für ben Salbmeffer des um jede Grangstäche fläche beschriebenen Areises finden.

Auf l. 1) Wem das, was im vorigen f von den in der Lugel gesetzen körperlichen Winkeln gestagt worden, auf die Eden des zu berechnenden Körpers angemundet wird, und die Buchftaben 2/2/2/4/4/6/6/6/4/4 die ihnen daselbit bengetega ten Bedeutungen behalten; so hat man die dren letteren Wins bel aus den dren ersteren vermittelft der Gleichungen,

2) Ift einer von den Winkeln e, e', e'', gefunden wor. ben, so hat man auch n, vermittelft einer von den drey Gleir hungen, (§-143. 7)

Cos.
$$\frac{1}{2}\eta = \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}\theta}$$
, Cos. $\frac{1}{2}\eta = \frac{\sin \frac{1}{2}x'}{\sin \frac{1}{2}\theta'}$,

Cos. $\frac{1}{2}\eta = \frac{\sin \frac{1}{2}x''}{\sin \frac{1}{2}\theta''}$.

3) Die Rante bes Rorpers fen = x, (fie ift nichts am bers als bas, was im vorigen & ber Schenkel bes torperlichen Winkels war), so hat man,

4) Ein Perpenditel aus dem Mittelpuntte der Angel auf eines der, den Rorper begrangenden, Bielede herabgelaffen, gebet durch den Mittelpuntt deffetben, und trifft verlangert den

pol bes um ihn beschriebenen Reeises. Die Bogen zwischen biefem Pole und ben Eden bes gerablinigen, ober, welches ban Ramliche ift, ben Eden bes sparifchen Bieleds, sollen respektive für bas led, med, und ned, burch q, q', q'', bezeichnet werben, und bie Winkel, welche sebe zwen zunachst liegenden rings um ben Pol einschließen, burch a, a', a'', so

hat man,
$$\alpha = \frac{360^{\circ}}{1}$$
, $\alpha' = \frac{360^{\circ}}{m}$, $\alpha'' = \frac{360^{\circ}}{n}$,

Sin, $\varphi = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \alpha'}$, Sin, $\varphi' = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \alpha'}$,

Sin, $\varphi'' = \frac{\sin \frac{1}{2} \eta}{\sin \frac{1}{2} \alpha'}$ (§ 57. 4).

5) Die halbmeffer ber um das led, med und ned ber schriebenen Rreise find die Sinuffe ber Bogen φ, φ', φ". Bezeichnet man also diese halbmeffer durch y, y', y", fo hat man,

$$y = r \sin \varphi$$
, $y' = r \sin \varphi'$, $y'' = r \sin \varphi''$.

6) Bezeichnet man ferner den respektiven glacheninhalt bes lede, mede und nede durch f, f', f", fo hat man,

$$f = \frac{1}{4} \ln V(y^2 - \frac{1}{4}x^2), \quad f' = \frac{1}{4} \max V(y'^2 - \frac{1}{4}x^2),$$

 $f'' = \frac{1}{4} \max V(y''^2 - \frac{1}{4}x^2).$

- 7) Hieraus erhalt man ferner die Oberflace des Korpers.

 LE + Mf' + Nf'.
 - 8) Den kubischen Inhalt deffelben = LLf V(r2-y2) + LMf'V(r2-y2) + LNf'V(r2-y22).

Ce bleibe nun nur noch übrig, biefe formeln auf die Be-

\$ 145.

a) Bevechnung bes Rorpers I. \$ 144.

1) gur diesen Körper ift 1 = 3, m = 4, h = 5; p = 1, q = 2, r = 1; % = 60°, w = 90°, w = 108°; L = 20, M = 30, N = 12. Man hat also auß 1 § 144 bie folgens ben drep Gleichungen:

Sin, 30° Sin, \(\frac{1}{2}\theta'\) \(\Rightarrow\) \(\Righta

2) Aus ben benben erften erhalt man,

$$\sin \frac{1}{4} = \sin \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{1}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \sin \frac{1}{4} c$$

Der britten Gleichung tann man biefe Form geben,

$$2 \sin \frac{1}{2} \ell' \cos \frac{1}{2} \ell' \cos \frac{1}{2} \ell'' + (1 - 2 \sin \frac{1}{2} \ell'^2) \sin \frac{1}{2} \ell''$$
= Sin. \(\frac{1}{2} \ell_1, \)

welche fich, wenn für Sin. & d', Sin. & d', ihre fo eben gefuns benen Werche substituter, und durch Sin. & dividire wird, in die folgende verwandelet:

$$2V_2$$
, $\cos \frac{1}{4} = (1+V_5) \sin \frac{1}{4} + \frac{3-V_5}{4}$.

3) Man quadrire, was sich auf benden Seiten des Gleis beitsgeschens besindet, und setze $1 - \sin \frac{1}{4} \theta'^2$, $1 - \sin \frac{1}{4} \theta'^2$ für Cos. $\frac{1}{4} \theta'^2$, Cos. $\frac{1}{4} \theta'^2$, hierdurch entstehet die Bleichung, $8 (1 - \sin \frac{1}{4} \theta'^2) (1 - \sin \frac{1}{4} \theta''^2) = (6 + 2 V_5) \sin \frac{1}{4} \theta' + (V_5 - 1) \sin \frac{1}{4} \theta^2 + \frac{7 - 3 V_5}{8}$

oder, wenn man fur Sin. I 0', Sin. I 0" ihre Werthe aus 2

fest, und das, was fich aufhebt, auf benden Seiten wegger laffen wird, bie Sleichung vom gwenten Grabe,

8-(19+1/5)
$$\sin \frac{1}{4}\theta^2 = (1/5-1) \sin \frac{1}{4}\theta^2 + \frac{7-31/5}{8}$$
; und diese giebt,

Sin.
$$I = V \frac{249 - 15 V 5}{608}$$
.

4) hieraus erhalt man nun,

Cos.
$$\frac{1}{4}\eta = \frac{\sin \frac{1}{4}\pi}{\sin \frac{1}{4}} = V \frac{\frac{159}{249 - \frac{15}{4}}}{\frac{249 - \frac{15}{4}}{60876}} = V \frac{\frac{37848 - \frac{1880}{5}}{60876}}{\frac{50876}{60876}}$$
Sin. $\frac{1}{4}\eta = V \frac{\frac{23028 + \frac{1880}{5}}{60876}}{\frac{23028 + \frac{1880}{5}}{60876}} = V \frac{\frac{5757 - 470}{5}}{\frac{15219}{5}}$.

5) Sest man ben für Sin. In gefundenen Ausbrud, ber Rarge wegen, = a, fo ift (§ 144. 5)

Sin.
$$\varphi = 4a$$
, Sin. $\varphi' = aV2$, Sin. $\varphi'' = aV\frac{10+2V5}{5}$.

6)
$$y = 2ar$$
, $y' = arV^2$, $y'' = arV \frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}$, $x = 2ar$.

7)
$$l = 5 a^2 r^2 V 5$$
, $l' = 4 a^2 r^3$, $l'' = a^2 r^2 V (25 + 10 V 5)$.

- 8) Obersiche des Körpers = 12 a² r² [10 + 5V 3 + V (25 + 10 V 5)].
- 9) Inhalt deffelben = 20 fr \((1-4x^2) + \text{10f'r} \((1-2x^2) + 4f''r \) \[1 - \frac{x^2(10+2\sqrt{5})}{5} \]

b) Berechnung bes Rorpers II: \$ 142.

1) Für diesen Körper ift 1:= 4, m = 6, n = 8; P = q = r = 1; * = 90°, % = 120°, *" = 135°; L = 12, M = 8, N = 6. Man hat also, da

Sin.
$$\frac{1}{2} \approx \frac{1}{V^2}$$
, Sin. $\frac{1}{2} \approx \frac{V_3}{2}$,

Sin. $\frac{1}{4}x'' = \sin. 67^{\circ} 30' = \cos. 22^{\circ} 30' = \frac{1/(2+1/2)}{2}$

bie folgenden bren Gleichungen (§ 144. 1):

$$\frac{1}{V^2}\sin\frac{1}{2}\theta' = \frac{V_5}{2}\sin\frac{1}{2}\theta_1$$

$$\frac{1}{V^2} \sin \frac{1}{2} \theta'' = \frac{V(2+V^2)}{2} \sin \frac{1}{2} \theta_1$$

Sin. $\frac{1}{4} \theta' \cos \frac{1}{4} \theta'' + \cos \frac{1}{4} \theta' \sin \frac{1}{4} \theta'' = \sin \frac{1}{4} \theta$

2) Aus ben erften benben Gleichungen erhalt man

$$\sin \frac{1}{4} \theta' = \frac{V^6}{2} \sin \frac{1}{4} \theta_1 \sin \frac{1}{4} \theta'' = \frac{V(4+2V^2)}{2} \sin \frac{1}{4} \theta_1$$

oder, wenn man, der Kürze wegen, $\frac{V6}{2} = e$, $\frac{V(4+2V^2)}{2} = e^t$ fest,

Sin. I & = e Sin. I , Sin. I " = e' Sin. I , Cos I & = V(1-e' Sin. I &), Cos. I & = V(1-e' Sin. I &). Berden diefe Berthe in der dritten Stetchung in 1 subfituirt,

und durch Sin. $\frac{1}{4}\theta$ dividirt, so erhalt man, $eV(1-e^{t^2} \sin \frac{1}{4}\theta^2) + e^tV(1-e^2 \sin \frac{1}{4}\theta^2) = 1.$

Die Muflofung Diefer Gleidung giebt,

Sin.
$$\frac{1}{2} = V \left[1 - \frac{(e^2 + e^{/2} - 1)^2}{4e^2 e^{/4}} \right]$$

Sest man nun wieber für o, o'a ibre Beribe, fo erhalt man nach ber geborigen Reduktion,

$$\sin \, \frac{1}{4} = V \frac{14 - Va}{24}$$

Cos.
$$\frac{1}{4}\eta = V \frac{84 + 6V^2}{97}$$
, Sin. $\frac{1}{4}\eta = V \frac{15 - 6V^2}{97}$

4) Da
$$\alpha = 90^{\circ}$$
, $\alpha' = 60^{\circ}$, $\alpha'' = 45^{\circ}$, $[0 \text{ iff}]$,
Sin. $\varphi = V \frac{26 - 12V^2}{97}$, Sin. $\varphi' = 2V \frac{13 - 6V^2}{97}$,

$$\sin \varphi'' = \sqrt{\frac{28 + 21/2}{97}}$$

$$y = rV \frac{26 - 12V^2}{97}, y' = 2rV \frac{13 - 6V^2}{97}$$

$$y'' = rV \frac{20 + 2V^2}{97}, \quad x = 2rV \frac{13 - 6V^2}{97}$$

6)
$$f = \frac{5^2 - 24 V^2}{97} r^2$$
, $f' = \frac{13 - 6 V^2}{97} 6 r^2 V 3$

$$F'' = 8 \frac{V(99 + 14V^2)}{97} r^2 = \frac{8 + 56V^2}{97} r^2$$

$$4 \operatorname{fr} V \frac{7^{1} + \frac{12}{12} V^{2}}{97} + \frac{8}{5} \operatorname{fr} V \frac{45 + \frac{24}{12} V^{2}}{97} + \frac{2 \operatorname{f}'' \operatorname{r}}{7} V \frac{69 - \frac{2}{12} V^{2}}{97}$$

9 1475

e) Berechnung bes Körpers HI. § 144,

q=1, r=1; &=90°, &'=120°, &''=144°; L=30, M=20, N=12. Man hat also, wenn far Sin. \(\frac{1}{2} \alpha_1'', \text{ sin. } \(\frac{1}{2} \alpha_1'', \text{ in S 144. 1', ihre Werthe gesett werden, die folgenden drey Gleichungen:

Bin, 1 0' Cas, 1 6" + Cas, 1 6' Sin, 1 4" = Sin, 1 4.

2) Wenn man, ber Kurge wegen, 2 on 1/(5+1/5) = 0/

fett, fo findet man aus den benden erften Gleidungen,

Sin. I'. = e Sin. I e, Sin. I e" = e' Sin. I e,

Cos Ie = V(1-e' Sin. Ie'), Cos. Ie" = V(1-e' Sin Ie').

Berden diese Werthe in der dritten Gleichung substitutrt und durch Sin. Ie dividirt, fo erhalt man,

 $eV(1-e^{t^2}\sin\frac{1}{2}\theta^2) + e^tV(1-e^2\sin\frac{1}{2}\theta^2) = 1$, und hieraus,

Sin.
$$\frac{1}{2}\theta = \sqrt{\left[1 - \frac{(e^2 + e^{/2} - 1)^2}{4e^2 e^{/2}}\right]};$$

und wenn wieder für og et, ihre Berthe gefest werden,

Sin.
$$\frac{1}{4} = \frac{35 - 2V5}{60}$$
.

3) 21160

Cos.
$$\frac{1}{4}\eta = V \frac{210 + 12V5}{241}$$
, Sin. $\frac{1}{4}\eta = V \frac{51 - 12V5}{241}$.

Sin.
$$\varphi = V \frac{62 - 24V5}{241}$$
 Sin. $\varphi' = 2V \frac{31 - 12V5}{241}$

$$\sin \varphi'' = V \frac{66 - 10 V 5}{241}$$

$$y = xV \frac{62 - 24V5}{241}, y' = 2xV \frac{51 - 12V5}{241}$$

 $y'' = xV \frac{66 - 10V5}{241}, x = 2xV \frac{31 - 12V5}{241}$

6)
$$f = \frac{(31-12\sqrt{5})}{241} 4r^2$$
, $f' = \frac{31-12\sqrt{5}}{241} 6r^2\sqrt{3}$

$$f'' = \frac{10 \, r^3}{241} \, V (965 - 558 \, V 5).$$

- 7), Die Oberfidche des Körpers = 30 f + 20 f/ + 12 f/4,
- 8) Der Inhalt deffelben =

$$10 \text{ fr } V \frac{179 + 24 \text{ V}^5}{241} + \frac{20 \text{ f/x}}{3} V \frac{117 + 48 \text{ V}^5}{241}$$

$$+41^{175}V^{\frac{175+10V5}{241}}$$

XI. Körper, welche von lauter Rhomben begrange werben.

\$ 148.

In ben bren borbergebenden Abichnitten haben wir uns mit ber Berechnung folder Korper beschäftigt, welche (von lauter regularen Siguren begrangt werden, und swar: a) mit ben eigentlich fogenannten reguldren Rorpern, b. f. folden, welche nur von reguldren Figuren einer Art eingeschloffen werden; hierauf 2) mit benen, welche von amenerlen regulas ren Riquren, und endlich 3) mit benen, welche von breners len regularen Figuren eingefcoloffen werben. Wir haben geles ben. bağ es, wenn die Prifmen und die Rorper \$ 125 VIII. nicht mit gerechnet werden, in allem nur 18 fo begranate Rore per gebe, namlich, 5 von der erften Art, 10 von der gwenten. und 3 von der britten Art. Jest wende ich mich gur Unter fudung und Berechnung folder Rorper, welche bon lauter Rhomben eingeschloffen werben, ju welchen Rlaffe bas in \$ 96 und f 97 betrachtete Rhomboeder gebort; und amar merbe id mid, um diefen Untersudungen nicht mehr Plas eingus raumen, als ihnen in hinficht auf ihre Bichtigfeit gutommt, blok auf Diejenigen einschranten, welche von lauter gleichen und abnlichen Abomben eingeschloffen, und beren torperliche Wintel von blog ftumpfen, oder blog fpigen Binteln gebildet werden. Dieje Korper laffen fich aber nicht mehr, wie die von regularen Siguren begrangten, innerhalb einer Rugel fo fenen, daß alle ihre Eden in der Blache berfelben bu liegen tommen, weil es feinen Bunft geben tann, ber von ben vien Binkelipipen eines Rhomben gleich weit entfernt mare. Ine

deffen laffen fic, wie sozieich gezeigt werden isll, sinnerhalb dieser Körper solche Rugeln beschreiben, deren Oberflächen die zhombischen Flächen des Körpers berühren, durch deren Dalbe messer alsdann sowohl die Kanten, als die Oberfläche und der Inhalt dieser Körper ausgedrückt werden können.

\$ 149.

An fg. Man soll alle mögliche Salle angeben, in well chen ein Körper von lauter gleichen und abnitchen Rhome ben eingeschlossen werden kann, jedoch unter der Einschränskung, daß zur Bildung einer Ecke nur einerley Winkel ger braucht werden, nämlich entweder die spigen, oder die kumpfen Winkel der Abomben.

- Auft. 1) Da' nicht mehr als bren ftumpfe Bintel gur Bildung einer Ede mit einander verbunden werden tonnen, so tann man hiervon ausgeben, um die verschiedenen möglichen Idle zu bestimmen. Es seven ABCD, ADEF, ABGF, (Fig. 61) dren rhombische Granzstächen, welche ben A mit ihren ftumpfen Binteln, BAD, DAF, FAB, zusammen goffen. Die Puntte B, C, D, E, F, G, bezeichnen alsbann eben so wiele Spigen anderer torperlichen Bintel, von denen die ben C, E, G, dem ben A gleich und ahntich find; die übrigen B, D, F, aber aus spigen Binteln zusammen gesetzt werden muffen.
- 2) Et konnen aber ben B zu ben benben fpigen Binkeln ABC, ABG, nicht weniger als awen andere gleiche Binkel kommen. Man setze daher zuerft an B die benben Abomben IBGH, IBCK, an, so daß um diesen Punkt die vier gleichen spinkel ABG, ABC, CBI, IBG, liegen.
- 3) Denkt man fich nun die großeren Diagonalen der Rhom, ben BF,-FD, DB, gezogen, fo entflebet eine gleichseitige Byrramite, deren Grundfiche das gleichseitige Dreped BDF und

beren Spite A ift. Denkt man fich ferner die Keisern Diasgonaten AG, GI, IC, GA, gezogen, so entstehet eine andere gleichseitige Pramide, die ihre Spige in B hat, und beren Grundsläche das Quadrat AGIC ift. Bende Pyramiden ges boren also zu denen § 110.

- 4) Es bezeichne w die Reigungewintel der Rhomben BADC, BAFG, alfo auch ben von jeden zwen anderen an einander flogenden Grangflachen; ferner y den fpigen Wintel ber Rhomben.
- 5) Man hat alsbann aus § 110, 5 für die dropedige Pp, ramide ABDP, n=3, $l=\psi$, $\mu=180^{\circ}-\nu$, und daher,

$$\sin \frac{1}{2} \psi = \frac{\sin \frac{1}{2}}{\cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}} \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} v^{-1}}.$$

Far die vierfeitige Ppromide BAGIC, ift m = 4, 0 = 4,

Sin,
$$\frac{1}{4}\psi = \frac{\sin 45^{\circ}}{\cos \frac{1}{4}y} = \frac{1}{V^{2} \cdot \cos \frac{1}{4}y}$$

6) Gest man biefe benben Berthe pon Sin. I φ einander gleich, fo erhalt man,

$$\frac{1}{\sqrt{2}, \cos \frac{1}{2} \gamma} = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} \gamma};$$

-mithin,

Tang.
$$\frac{1}{2}y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
, also $y = 70^{\circ}$ 31' 44";

und hieraus ferner, da

Sin.
$$\frac{1}{2}y = \frac{\text{Tang. }\frac{1}{2}y}{\text{Sec. }\frac{1}{2}y} = \frac{\text{Tang. }\frac{1}{2}y}{V(1 + \text{Tang. }\frac{1}{2}y^2)}$$

$$\beta \text{In. }\frac{1}{2}\psi = \frac{V5}{2}, \text{ also }\psi = 120^{\circ}.$$

7) gur diefe Busammenfegung ift bemnach ber fpige Wini

tel des Ahdmben = 70° 31' 44", also ber ftumpfe = 109° 28' 16", und der Reigungswinkel der Erdusfichen.

8) Jest will ich annehmen, der körperliche Winkel den B werde von funf fpigen Winkeln der Rhomben gebildet; also dann ihat man anstatt der vierseitigen Pyramide in 3 eine funffeitige. Für diese ift nun m f 110, n = 5, f = \psi, \mu = \psi, also,

Sin.
$$\frac{1}{2}\psi = \frac{\sin. 54^{\circ}}{\cos. \frac{1}{2}\gamma} = \frac{1+1/5}{4\cos. \frac{1}{2}\gamma}$$

Da nun fur die brenfeitige Pnramide, (5)

$$\sin \frac{1}{2} \psi = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} \gamma},$$

fo hat man,

$$\frac{1+V_5}{4\cos\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}},$$

und folglich,

Tang.
$$\frac{1}{2}y = \frac{2}{1+V\delta} = \frac{V\delta^{-1}}{2}$$
,
Tang. $y = \frac{2 \text{ Tang. } \frac{1}{2}y}{1-\text{Tang. } \frac{1}{2}y^2} = 2$.

Sieraus erhalt man ben fpigen Bintel des Mhomben = 63° 26' 6", und daher ben ftumpfen = 116° 35' 54"

9) Aus Tang.
$$\frac{1}{2}v = \frac{V_5 - 1}{2}$$
 findet man
$$\frac{1}{\sin \frac{1}{2}v} = \frac{V_{(10 + 2V_5)}}{2}$$

und hieraus ferner,

$$\sin \frac{1}{2} \psi = \frac{V(10 + 2V8)}{4} = \sin 72^{6}$$

Denmach' ift w ober ber Reigungewintel ber Grangfidden = 1440.

10) Nimmt man an, daß fich um B fechs fpige Bintel befinden, fo ift fur die hieraus entftebende fechsfeitige Pyramide

$$\sin \frac{1}{4} \psi = \frac{\sin 60^{\circ}}{\cos \frac{1}{4} y} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos \frac{1}{4} y}.$$

Bird biefe Gleichung mit ber, Sin. & $\psi = \frac{1}{2 \sin 4 \gamma}$ verbune

ben, so erhalt man Tang. $\frac{1}{2}y = \frac{1}{V_3}$, und hierans $y = 60^{\circ}$.

Alsbann ift aber der flumpfe Winkel des Ahomben = 120°. Da nun dren solche Winkel keine Ede bilden konnen: so ift dieser Fall nicht guldfig.

11) Im Allgemeinen hat man fur die nseitige Pyramibe

$$\sin \frac{1}{2} \psi = \frac{\sin \frac{(n-2)}{n}}{\cos \frac{1}{2} \psi}.$$

Da nun auch 8in. I w = 1, 2 Sin, 1 y, fo hat man,

Tang.
$$\frac{1}{2} y = \frac{1}{2 \sin_{1} \frac{(n-2) 90^{\circ}}{n}}$$

Hieraus ergiebt fic, baß für ein größeres n ber spige Wintel bes Ahomben kleiner, und folglich der kumpfe Wintel größer wird. Da nun schon für n=6 der ftumpfe Wintel zu groß ift, so ift er es um so mehr für n>6.

12) Es giebt alfo nur zwenerlen Rhomben, von benen ein Rorper unter ben, in der Aufgabe angegebenen Bedingungen, eingeschloffen werden kann. Die folgende Aufgabe wird uns die hieraus eniftehenden zwen Rorper naber tennen tehren.

Aufg. Die Anzahl der Grangflächen, Ranten und Eden von jeder Art, für die beyden Korper des vorigen S's zu finden.

Aufl. 1) Da ein Rhombus zwen ftumpfe und zwen frige Wintel hat; so ift die Anzahl der ftumpfen Wintel auf der Oberfidde eines von Ahmmben begränzten Körpers gerade so groß als die Anzahl der spigen Wintel. Bezeichnet demnach E' die Anzahl der Eden, welche von den ftumpfen Winteln, und E" die Anzahl der Eden, welche von den spigen Binteln, der de Anzahl der Eden, welche von den spigen Binteln gebildet werden; so muß für den ersten Körper des vortigen J's, 3 E' = 4 E", und für den zwenten Körper 3 E' = 5 E" senn.

2) Es bezeichne nun E die sammtliche Anzahl der Eden; so ift auch E' + E" = E. Man hat demnach für den erften Rorper die benden Gleichungen:

$$E' + E'' = E$$
, $3E' = 4E''$;

woraus man E' = \$ E, E" = \$ E erhalt. hieraus folge, daß sowohl die Angahl der flumpfen, als der fpigen Bintel = \$ E ift.

3): Da nun die Summe eines fpigen und eines ftumpfen Bintels eines Rhomben = 2 Rechten, und die Summe allet, Mintel auf der Oberfidche des Korpers = 4 E - 8 Nechten (§ 69); so hat man die Gleichung:

$$\frac{24}{7}E = 4E - 8$$

woraus man E = 14 erhalt. Demnach if E' = \$ E = 8, E" = \$ E = 6; ferner die Angahl ber fitmpfen, ober ber fpigen Binkel = \$ E = 24. Da nun jeder Ahombus \$ flumpfe und 2 fpige Winkel enthalt; fo ift die Angahl Diefer Rhomben $=\frac{24}{2}=12$, und dabet die Anjahl der Kanten $=\frac{14\cdot 4}{2}=24$.

4) Fur den zwenten Korper hat man Die benden Gleischungen,

E' + E" = E, 3E' = 5E", worans man E' = ‡E, E" = ‡E erhalt. Diernach ift fer wohl die Anzahl der ftumpfen, als die der fpison Winkel = $\frac{15}{8}$ E. Man hat also die Gleichung

 $\frac{30}{8} E = 4E - 8,$

und diese giebt E=5a, $E'=\frac{1}{4}E=20$, $E''=\frac{1}{4}E=12$. Demnach ift die Angahl der stumpfen, oder der spigen Winkel $=\frac{15}{8}E=60$, die Angahl der Rhomben $=\frac{60}{8}=30$, und daher die Angahl der Ranten $=\frac{30\cdot 4}{2}=60$.

§ 151.

Ans f 149, 150, ergeben fich nun die folgenben gwen Rorper:

I. Ein Körper, welcher von 12 gleichen und ahnlichen Momben begränzt wird. Er hat a4 Kanten und 14 Eden, deren 8 von dren flumpfen, und 6 von vier spigen Winkeln bes Rhomben gebildet werden. Der spige Winkel eines jeden Rhomben ift = 70° 31' 44", der flumpfe = 109° 28' 16", der Reigungswinkel seiner Flächen = 120°. Nan kann dies sein Körper ein Rhombvidal Dobekaeder nennend (N. f. Fig. 62.)

II. Ein

11. Sin: Adopery welcher won 30 gleichen, und ichnlichen. Momben begranzt wied. Er bat 60 Kanten und 52 Ecken, daren. 20 non drey fumpfen, und 12 von fünf spisen Binteln der Rhomben gebildet werden. Der spise Bintel eines jeden; diefer Rhomben ift = 65° 26' 6", der stumpfe = 116° 53' 54", der Neigungsminkel derseiben = 144°. Ran fann ihn ein Rhom boldele Kriakonsacher nennen. (Fig. 63 deigt dies sen Körper zur Pallfe.)

· § 152,

** y ** == 116 }

Um ig. Aus den Mittelpunkten zweger an einander geangenden, gu einem ber im vorigen f erwähnten Korpern geborigen Abomben, find Derpendikel auf den Ebes nen derfelben gerichten: man follischen Dunkt ibestinmen, wo sich, wenn es mäglich fit, die Derpendikel schneiden.

Aufi. 31h Es ienen ABCD, CDEF (Tig. 64) zwen in CD, an einauber, grauzonde Rhomben; AC, BD, und CE, DF, thre Diagonalen, also m, p, three-Mittelpuntes. Aus. wift ma auf ABGD, und aus p, pq auf CDEF perpendig tuidr errichtete man, soll den Punts a:finden, mu diese Perspendiel, wenn es möglich-ift, zusammen ftofen.

2) Daß fie aber zusammen ftoßen muffen, kann so bewies sen werden. Man siehe aus m und p auf CD bie Perpena diklet mm, pn, welche fich nothwendig in einem Puntte dieser Linie vereinigen werden weil die Romben dbnlich und gleich, find. Demnach liegen die Linien mn, pn, in einer auf CD perpendikularen Seene mnp, aus in dieser Seene liegen auch die Perpendikularen Keene mnp, aus in dieser Seene liegen auch die Perpendikularen folglich auch die Seene Mmn auf ABCD, und die Seene Ppn auf CDEF, folglich auch die Seene Mmn auf ABCD, und die Seene Ppn auf CDEF perpendikular ift, so ist auch die Linie CD, sowohl auf der Seene Mmn, als auf der Seene Ppn perpendikular, und daher machen diese bewen Seunen nur eine

einzige aus, welche teine andere uls die Stene pum ift. Da ferner die Wintel kimn, Ppn, mnp, mfammen wenigen alle A Rechte betragen, so muffen die Linien mM, pP, binlang, lich verlangert in einen Punts q pusammen treffen.

- 3) In den Orevecten ming, png, ift min = np, ng gomeinschaftlich und der Winkel ning = npin = W, also
 mag = pq, ming = png = ft, wenn v beit Reigungswing
 kel der Rhomben bezeichnet.
- 4) Es sen der spige Winkel des Momben = y, die Seisest deffelben = as alsdann ift mn = ja Sin. v. Mund hat also in dem rechministigen Orepette quan, mag = 20m . Tang. j \psi = ja Sin. v Tang. j \psi.
 - 5) Sest man daher ing =: pq = x) fo fft, x == 4k din. y Tang. din.

Ans diefer formal laft fic ber Werch won up und somit anch ber Puntt a finden; beim man barf wur ane dem Micrele' puntte eines ber bebben Rhomben bin Perpendifel errichten,' und baffelbe so groß machen, als ber gefundene Wereb angiebt.

detaeber un, fo hat man aus I 149. 6, Tang. $\frac{1}{4}$ $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Sin. $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$, und hierand ferner burch eine leichte Reche

nung, Sin. $y = \frac{2V^2}{3}$, Tang. $\frac{1}{4}\psi = V_3$, und daßer für diesen Körper,

7) Für das Rhomboldal , Eriakontaeder hat man and \$ 149. 8, Tang. y = 2, mid aus \$ 149. 9, Sin. $\frac{1}{4} \psi$ wo $\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}$

x=+V(1++V5)

\$ 153.

Aufg. Die Bante, den Inhalt einer jeden Grangfläche, die Oberfische und den kubifchen Inhalt, fowohl des rhombischen Babekaeders als des Triakantaeders, durch den Salbmeffer der eingeschriebenen Augel auszudrucken.

Nufl. a) Für das Dodekgeden. Jür diesen Adrysen, ift die Kante a = \frac{r\sigma}{V_2} (f 152 Jul-). Hieraus erhält man' den Inhalt einer jegen Gränzsiäche des Körpers = \frac{r^2\V_2}{V_2}.

(f 152-6), und daher die Oberstäche des Körpers = \frac{r^2\V_2}{V_2}.

Denkt man sich zeiner den gausen Köppes in sauer Aproposition getheilt, deren jede eines der Rhomben zur Gruppssichen getheilt, deren jede stues der Rhomben zur Gruppssichen gerselben zur Odhe hatz so ist der Inhalt einer seden solchen Phramide = \frac{r^2\V_2}{V_2}, und seinen getheilt des gansen:

Lörpers = \frac{dr^2\V_2}{V_2}.

²⁾ Elio das Aufelensaedeng ... dernift die Rante

a = $\frac{1}{V(4+3V5)} = rV(5+2V5)$; Der Flöcheninhatt ein wes jeden Rhomben = $a^2 \sin y = 2r^2(V5-2)$; die Ohme Häche des Körpers = $60r^2(V5-2)$; der kubische Inhast idesselben = $80r^2(V5-2)$.

XII. Polytbrometrifche Mufgaben,

5 ±54.

Dalfelak

Anfg. ABCDE..., abodo..., (Tig. 65.); seven zwes Bellebige Vielede, welche einen Winkel A gemeinschaftlich haben, und beren Seiten nach ihrer Jolge, so wie sie die Borrespondirenden großen und kleinen Buchstaben anges bent, einander parallel sind; aus den Puntten o. d. v. 10. sin, nach den gleichnamigen Winkelpuntten C., D., E., 24. die Linien CC, dD, eE, 10. gezogen; ferner aus den name lichen Puntten, die Linie oo' der bB, dd' der oC, oo der dD, 10. parallel. Ist nun n die Aniahl der Geiten eines jeden ver beydelt dielecke, so mustehen hierdurch n. E. Dabillesbyrämine, Boot, Cocidi, Daes, Eeff, n. s. v., und eben so viele Dreyecke, Coo', Bild, Eso, Eff, n. s. v., und wird nun gesotdert, den Indale eines jeden von diesen Parallelogrammen und Broyecken durch die Seiten und Winkel der Dielecke auszudrücken.

3. Aufl. Man Vheichne bie Geiten AB, BC; CD, DE, ic.

des Bieledes ABCDE.... burch a, b, o d, te. und die Seisten Ab, bo, od, de, te. des Bieledes abode... durch a', b', o', d', 1c.; ferner die außeren Winkel, welche in dem einen Bielede so groß sind als in dem anderen, durch die an deut selben besindten Buchstaden B, C, D, 1, 1c., wie den den Polygonometrischen Ausgaben im ersten Ebeile dieses Wertes geschehen ift. Liss man nun von dem Punkte A auf die Seiten BC, CD, DE, 1c., die Perpendikel Aq, Aq', Aq'', 1c. berah, welche die Seiten de, cd, do 1c., oden sin Berlanges rungen, in den Punkten p, p', p'', tressen, so ist, wie am angesührten Ortez § 85e gelehrt warden.

 $Aq = a \sin B_i$ $Ap = a' \sin B_i$

 $Aq' = b \sin C + a \sin (C + B)_A$ $Ap' = b' \sin G + a' \sin (C + B)_A$

 $Aq'' = c \sin D + b \sin (D+C) + a \sin (D+C+B),$ $Ap'' = c' \sin D + b' \sin (D+C) + a' \sin (D+C+B),$ u. f. w.

Dieraus-erhalt man nun).

pq = $(a - a') \sin B_i$ p'q' = $(b - b') \sin C + (a - a') \sin (C + B)_i$ p'q'' = $(c - c') \sin D + (b - b') \sin (D + C) +$ $(a - a') \sin (D + C + B)_i$ u. f. w.

Die Linien pq, p'q', p"q", 2c., sind aber die Hohm der Par rallelogramme und Orevede; man dat also, da Bo" bo bo', Co' = Bo' = bo bo', Co' = co co Dd' = CD - Co' = o o', Do' = de = d, Ee' = DE - Bo' = d - d', u. s. v.

Prigr. Bbcc' = b' (a-a') 8in. B_a'

Prigr. Codd' = e' (b - b') Sin. C + o' (a - a') Sin. (C + B)_A

Prigr. Ddec' = d' (c - o') 8in. D + d' (b - b') 8in. (D + C)_a

+ d' (a - a') Sin. (D + C + B)

a. f_1 w.

△Cco'= [(h-b') (a-a') Sin, B.

 $\triangle Ddd' = \frac{1}{4}(c-c')(b-h')Sin, C+\frac{1}{4}(c-c')(a-a')Sin, (C+B)$ $\triangle Ecc' = \frac{1}{4}(d-d')(c-c')Sin, D+\frac{1}{4}(d-d')(b-b')Sin, (D+C)$ $+ \frac{1}{4}(d-d')(a-a')Sin, (D+C+B)_{\delta}$

9.- f. 10.

Buf Rach & g6 bes erften Cheites, ift Polygon,

a'b' Sin. B + # a'c'Sin. (B + C) + # a'd'Sin. (B + C + D) + 2c.
b'c' Sin. C + # b'd' Sin. (C + D) + 2c. + # c'd' Sin. D + 2c.

Sest man nun gu biefem Bielede die Baraffelogramme und Prepede, beren Inhalt fo eben gefunden worden, fo erhalt man, Polygon ABCDE....

 $\frac{1}{4}(ab + ab' - a'b) \sin B + \frac{1}{4}(ac + ac' - a'c) \sin(B + C)$

 $+\frac{\pi}{2}(ad+ad'-a'd)$ Sin. (B + C + D) ic.

 $+\frac{1}{4}(bc+bo'-b'c)Sin.C+\frac{1}{4}(bd+bd'-b'd)Sin.(C+D)+1c$ $+\frac{1}{4}(cd+cd'-c'd)Sin.D+1c$

Es if over auch Polygon ABCDE....

in B+in B+in Sin (B+C)+ind Sin (B+C+D)+x.+ ibo Sin C+ind Sin (G+D)+x.+icd Sin D+x.;

man bat alfo, wenn biefe benben Ausbrude einander gleich

 $\begin{array}{l} (4b^4 - a^4b) & \text{Sin. B} + (ac^4 - a^2c) & \text{Sin. (B} + C) + \\ (ad^4 - a^4d) & \text{Sin. (B} + C + D) + \text{sc. +} \\ (bc^4 - b^4c) & \text{Sin. C} + (bd^4 - b^4d) & \text{Sin. (C} + D) + \text{sc. +} \\ (cd^4 - c^4d) & \text{Sin. D} + \text{sc.} \end{array}$

Eine wertwardige Gleichung, welche for alle! Bielede von ber Figur BCDEfedeb gift, worin in — 1 Seiten, auberen in — 1 Seiten parallel find, die übrigen gwey aber eine beliebige Lage haben tonnen.

Wegen der Allgemeinheit der polingonametrifchen Sage, Die im iften Scheile biefes Werke umftandlich gezeigt worden, gilt diefe Steichung auch alsdann, wenn, einige der Winkel B, C, D, ic. einwarte gehend find.

§ 255.

Aufg. Den kubischen Inhale eines jeden Körpers gie finden, welcher von zwey parallelen Vielecken von gleich vielen Seiten, übrigens aber von wilkührlicher Gestalt und Gröfe, und von so vielen Trapezen, als jes des dieser Vielecke Seiten har, hegranzt wird; jedoch ung ter der Bedingung, daß nichte mehr als die Seiten eines jeden Dielecks weniger eine, und die von ihnen einger schossenen Winkel gegeben seven.

Auf L. Ein solder Körper unter ben unendich vielen, welche man fic benten tann, sen ABCDEFF'AB'C'D'E' (Fig. 66); ABCDEF, A'B'C'D'E'F', sind die benden parallelen Flichen, hier Sechsece; AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E, u. s. w. seine trapetischen Seitenflichen. Nan verfahre nun wie folgt.

- 1) Man nehme eine der Geisentinien, des Körpers, eiwa Ad' für die erste ang und ziebe aus den Winkelpunkten B', C', D', E', F', die Linien B', C'c, D'd, E'e, F'f, ihr por rallel; sie treffen die Grundsiche in den Munkten d, c, d, o, f. Werden noch die Linien de, cd, do, af, gezogen, so entite het ein Prisma Adocheff'A'B'C'D'B'.
- 2) Man konftruire wun auf der Enunbfilche eine Rigur, wie die im vorigen 5 burch die namtichen Buchftaben bezeich

nete, mit Beglaffung ber Perpenditel, weiche nicht mehr ges braucht werben, und ziehe noch überdies die Linien C'e', D'd', E'e', F'e'.

- 3) Durch diese Construktion wird ber Korper gerlegt: 2) in das in 1 erwähnte Brisma; b) in die drenseitigen Prismen BBB'C'c'e, cCC'D'd'd, dDD'E'e'e, eEE'F'Pf; c) in die drenseitigen Prramiden C'Ccc', D'Ddd', E'Ece', F'Fst. Die drenseitigen Prismen können auch als halbe Parallelepipede am gesehen werden, deren Grundsiachen die Parallelepipede am Bbcc', Ccdd', Ddec', Eest', find, und deren Sobie die Entifernung der bepoen parallelen Melecke, d. h. die Hohe des Repers selbst ift.
- 4) Da die Seiten der berden parallelen Bielede die auf eine, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel als gegeben angenommen werden; so sese man AB = a, BC = b, CD = c, DE = d, BF = 0; AB' = Ab = a' B'C' = bc = b', C'D' = cd = c', D'E' = do = d', E'F' = ef = e'; ferner bezeichne man die außeren Winkeld dieser Bielede, wie immer, durch B, C, D, E; die Holles Körpers sen = h.
- 5) Bezeichnet man nun ben Inhalt des Bieled's Abodof burch Q, die Summe der Parallelogramme Bbeot, Codd', zc. burch Q', und die Summe der Orened'e Coc' Ddd', zc. durch Q''; ferner ben kubischen Inhalt des Körpers durch K; fo hat men.

$$R = (6 + 76 + 76)$$
 p²

und es ift nach bem vorigen S,

 $Q = \frac{1}{4}a'b' \sin B + \frac{1}{4}a'c' \sin (B + C) + \frac{1}{4}a'd' \sin (B + C + D) + \frac{1}{4}a'c' \sin (B + C + D + E) + \frac{1}{4}b'c' \sin C + \frac{1}{4}b'd' \sin (C + D) + \frac{1}{4}b'c' \sin (C + D + E) + \frac{1}{4}c'd' \sin D + \frac{1}{4}c'c' \sin (D + E) + \frac{1}{4}d'c' \sin E$

 $Q' = \frac{b}{(a-a')} \sin B + c' (b-b') \sin C + c' (a-a') \sin (B+G) + d' (c-c') \sin D + d' (b-b') \sin (C+D) + d' (a-a') \sin (B+C+D) + e' (d-d') \sin E + e' (c-c') \sin (D+E) + e' (b-b') \sin (C+D+E) + e' (a-a') \sin (B+C+D+E);$ $Q'' = \frac{1}{2} (b-b') (a-a') \sin B + \frac{1}{2} (c-c') (b-b') \sin C + \frac{1}{2} (c-c') (a-a') \sin (B+C+D) + \frac{1}{2} (d-d') (c-c) \sin D + \frac{1}{2} (d-d') (a-a') \sin (B+C+D) + \frac{1}{2} (e-e') (a-a') \sin (B+C+D) + \frac{1}{2} (e-e') (a-a') \sin (C+D) + \frac{1}{2} (e-e') (a-a') \sin (C+D) + \frac{1}{2} (e-e') (a-a') \sin (C+D+E) + \frac{1}{2} (e-e') (a-a') \sin (B+C+D+E) + \frac{1}{2} (e-e') (a-a') \cos (B+C+D+E) + \frac{1}{2} (e-e') (a-a') \cos (B+C+D+E) + \frac{1}{2} (e-e$

6) Substituirt man die Werthe von Q, Q', Q'', in dem Ausbrude von K, so erbalt man,

$$K = \begin{cases} (ab + 2ab' - a'b + a'b') \sin B + \\ (ac + 2ac' - a'c + a'c') \sin (E + C) + \\ (ad + 2ad' - a'd + a'd') \sin (B + C + D) + \\ (ae + 2ae' - a'e + a'e') \sin (B + C + D + E) + \\ (bc + 2bc' - b'c + b'c') \sin (C + D + E) + \\ (bd + 2bd' - b'd + b'd') \sin (C + D + E) + \\ (cd + 2cd' - c'd + e'd') \sin D + \\ (ce + 2ee' - e'e + c^2e') \sin (D + E) + \\ (de + 2de' - d'e + d'e') \sin D + \\ (de + 2de' - d'e + d'e') \sin D + \\ \end{cases}$$

7) Nach dem Zulape des verigen S's ift aber

a = (ab' - a'b') Sin. B + (ac' - a'c) Sin. (B + C) +

(ad'-a'd) Sin. (B+C+D) + (ac'-a'e) Sin. (B+C+D+E)

+ (bc'-b'c) Sin. C + (bd' - b'd) Sin. (C + D) +

(bc' - b'e) Sin. (C + D + E) + (cd' - c'd) Sin. D +

(ce' - c'e) Sin. (D + E) + (de' - d'e) Sin. E.

B Bird diefe Gleichung von ber in 6 abgegogen, fo et-

$$S(ab + ab' + a'b') Sin. B + (ac + ac' + a'c', Sin. (B + C) + (ad + ad' + a'd') Sin. (B + C + D) + (ae + ae' + a'e') Sin. (B + C + D + E) + (bc + bc' + b'c') Sin. (C + D) + (bd + bd' + b'd') Sin. (C + D) + (cd + cd' + c'd') Sin. (C + D + E) + (cd + cd' + c'd') Sin. (D + B) + (de' + de' + d'e') Sin. E$$

9) Satte man bie Gleichung in 7 mit 2 multiplicirt, und bierauf von der in 6. abgezogen fo wurde man ben folgenden Ausbrud erhalten haben;

$$\mathbf{K} = \frac{h}{6} \left\{ (ab + a'b + a'b') \sin B + (ac + a'c + a'c') \sin (B + C) + a'c' + a'c'$$

Bus. Obgleich die Rechnung hier nur für einen sechsseitigen Körper geführt worden, so tast fich doch daraus das Beset des Ausdruckes für seben anderen Körper dieser Art sebr leicht erkennen. Die Anzahl der Glieder, worans ein solcher Ausdruck, bestehet, ift der Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen gleich, welche sich aus n — 1 Geiten a, b, & d, 16. der nseitigen Gunphidde machen lassen, und daher

$$K = \frac{h}{6} \begin{cases} (ab + a'b + a'b') & \text{Sin. B +} \\ (ac + a'c + a'c') & \text{Sin. C +} \\ (bc + b'c + b'c') & \text{Sin. (B + C).} \end{cases}$$

Fir n = 5 1%

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{6} \begin{cases} (ab + a'b + a'b') & \text{Sin, B + C} \\ (ac + a'c + a'c') & \text{Sin, (B + C) + C} \\ (ad + a'd + a'd') & \text{Sin, (B + C + D) + C} \\ (bc + b'c + b'c') & \text{Sin, C + C} \\ (bd + b'd + b'd') & \text{Sin, (C + D) + C} \\ (cd + c'd + c'd') & \text{Sin, D, C} \end{cases}$$

Hebrigens gelten diefe Formeln, die Winkel B. C. D. u. mos gen tonver ober tontan fenn.

§ 156.

Man kann die in den varigen & gesundenen Kuedracke für den Körper Fig. 66 auch noch unter mancherten andere Forsmen bringen. Sest man & B. den Inhalt der Grundsläche ABCDEF = Ga und den Inhalt der oberen Jidche A'B'C'D'E'F' = G'4 so hat man.

G = {ab sin, B + {ac sin, (B+C) + {ad sin, (B+C+D) + {ac sin, (B+C+D+E) + {bc sin, C+ {bd sin, (C+D) + {bc sin, (C+D+E) + {cd sin, D+{ac sin, (D+E) + {d csin, E}

G' = $\frac{1}{4}$ s'b' sin. B + $\frac{1}{4}$ s'c' sin. (B + C) + $\frac{1}{4}$ s'd' sin. (B + C + D + E) + $\frac{1}{4}$ b'o' sin. (C + D) + $\frac{1}{4}$ b'c' sin. (C + D) + $\frac{1}{4}$ b'e' sin. (C + D + E) + $\frac{1}{4}$ c'c' sin. D + $\frac{1}{4}$ c'c' sin. (D + E) + $\frac{1}{4}$ d'e' sin. E

Der Ausbruck in & des vorigen S'e vermandels fich alfo, weine man G und Ge an die Stelle der Aggregate fest, benen fie gleich find, in den folgenden:

$$K = \frac{h}{3} (G + G') +$$

\$ 157.

Aufg. Den Inhalt eines jeden Polyeders zu finden.

Aufl. Man konnte das Polyeber in lauter Pyramiden gerlegen, ben Inhalt einer jeden dieser Pyramiden insbesope dere suchen, und hierauf alles jusammen addiren. Man kann aber auch auf die folgende einsachere Art dahin gelangen.

- 1) Man denke fich bas Polneder auf eine feiner Flachen geftellt, welche ats die Grundflache beffelben angefeben were ben kann.
- 2). Bertheile bierauf bas Polneber burch Sbenen, welche man ber Grundfläche parallel legt in lauter Korper von ber Art, wie fie im vorigen & betrachtet worden.
- 3) Berechne hierauf jeden diefer Korper einzeln; die Gums me aller gjebt den Inhalt des Polyeders.

9 158.

Sulfesas.

Aufg. In irgend einer Wbene ift eine Sigur gezeichnet: man foll ben Inhalt ihrer Projektion auf eine aus bere Ebene finden, wenu der Inhalt der Jigur und der Reigungewinfel der beyden Ebenen gegeben ift.

Mufl, 1) & fen ABC (fig. 67) ein in ber Sene LOPQ gezeichnetes Dreneck. Die Projettion beffelben auf die Seine LMNO- son abo; fie wied gefunden, wonn mann wann von den, Spissen Ap B. C. die Perpendikel Aa; Bb, Cou auf diese Seine berabickt. Der Reigungswinkel den benbenden Seinen sen = a.

- Drojektion; alsdam ift ABC: ABD wilde. AD was ac: ad = Abo; Abd, oder ABC: ABC: ABC: ABC: ABC: AD was ac: ad = Abo; Abd, oder ABC: ABC: Abc, it (2), ABC: ABC: ABC. Cos. a who who what ABC is Cheir (2), ABC: ABC: ABC. Cos. a ABD. Abd: Abd: Abcrems training and ABD. Abd: Abc. Thermal training and abd and ABD. Cos. a Wan finder demands ampear die Projektion eines Droped's, wenn man diefer Oreps ad mit dem Cofinus des Reigningswinkels multiplicits.
- 4) Jedes Dieled laft fich in Orenede zerlegen; man fine bet demnach auch pie Projektion eines Bieledes wenn man daffelbe mit dem Cofinus des Rejaungswinkels multiplicirt.
- Bus. Die Projektion einer gebrachenen Thache ift die ale gebraische Samme der Projektionen aller der einzestalt Figus ren, aus welchen diese Klache ausammengeketz ift. Es latt fic also auch die Projektion einer gebrochenen Rlache finden, wenn man den Racheninhalt der Figuren, woraus fie bestaßet, und ihre Reigungswindel gegen die Projektionsebene kennet.

Aufg. Die Reigungewinfel der Geangflachen eines

Polgebere flit gegeben; auch ift der Inhalt einer jeben biefer glachen, einer ausgenommen, gegebent man foll biefe unbefannte glache finden.

Erfe Muflofung.

Betrachtet man die Oberfische bes Torpers als eine ges brochene Flache, so ift jede Grungfische die Projektion des übris gen Theiles der gebrothenen. Die gesuchte Grangfische wied beinnach gefunden, wenn man Line jede der übrigen mit bent. Toffinis des Neigungswinkels dersetben gegon die gesuchte Flat multiplitier, und hierauf alle diese Produkte zusammen abbiet.

Beziginet man baber die Erdniftlichen des Polyeders, aber vielmehr ihren Inhalt butch a, b, e, d, vic.; und die Reigungswinftl je zweher diefer Flachen, 3. B. von a und d, aber von b und v, durch (a, d), (b, x); so erhalt man,

30

3mebie Auflofung.

Multiplicirt man die erfte von den gefundenen Sleichune

het hierauf die erfte van der Summe aller übrigen ab, follers halt man nach der gehörigen Berfenung der Glieder,

a= b= + c= + d= + e= + 1c. - 2 bo Cos. (b, c) - 2 bd Cos (b, d)

2 be Cos. (b, e) - ic. - sed Cos. (c,d) - 2 ce Cos. (c, e).

- 1c. - 2 de Cos. (d, e) - it. 1c.

Aehnliche Gleichungen findet man fur die übrigen Grange flacen.

Ran erhalt bemnach eine Grangfiade eines Polyeders, wenn man von der Summe der Quadrate aller übrigen die doppelten Produtte von je zwen und zwen derselben mit bem Cofinus ihres Neigungswinkels multiplicitt, abziehet, und hierauf dus bem Refte die Quadratwurgel ziehet.

Buf. Wenn also in einer brenfeitigen Ppramide dren ihr ter Alden auf einander verpendikular fteben, und einen tore perlichen rechten Winkel bilden, so find die Coffinusse der Reis gungswinkel dieser Alden gegen einander alle = 0; folglich ift in diesem Falle das Quadrat der, dem körperlichen rechten. Winkel gegenüber liegenden Alde den Quadraten der drey übrigen zusammen genommen gleich. Dies wurde schon § 108. auf einem anderen Wege gefunden.

€ 160,

Aufg. Den kubischen Juhalt eines brevseitigen abnitätrzen Prifmas zu finden.

(Unter einem abgefürzien Prifma wird aberhaupt ein Rorper verftanden, welcher übrig bieibt, wenn man von; frgend einem graden ober lichteten Prifma, durch eine ger gen bie Grunbfidde geneigte Sone ein Stut abichneibet.)

Aufl. 1) Es fen ABCFED (fig. 68)' ein bienfeitiges' abgefürztes Prifma, ABC feine Grunbfidche. Es idft fich burd bie Diagonalen EA, DC, ber Bierede ABED, AOFD,

in drep drepfeitige Pyramiden BABC, BADC, EDFG, gere legen.

- ABED, BCFE, so entstehen zwey andere Pyramiden BADC, BDFC. Die erstere, sodmlich BADC, ift der Pyramide EADC gleich, weil sie die gemeinschaftliche Grundsiche ADC, haben, und ihre Spigen B, E, in der Linie BE liegen, well, che dieser Grundsiche parallel ist. Die zweyte, nämlich BDFC, ist eben so der Pyramide EDFC gleich, weil sie gemeinschaftliche Grundsiche CFD haben, und ihre Spigen in ber Parallele BE liegen. Der Körper-ABCFED ist dems nach auch den drey Pyramiden EABC, DABC, BDFC, gleich.
 - 3) Biebet man die Diagonale FA, so ist das Orened. CAF dem Drehede CDF gleich, weil beibe die gemeinschafts liche Grandlinie CF haben, und awischen benselben Paralles Ien AD, CF, liegen. Die Pyramiden BACF, BDFC, haben bemnach die gleichen Grundsichen CAF, CDF, welche in eigen und derselben Ebene liegen; sie haben ferner gleiche Ihe, weit sie Spize B gemein haben, und ihre Grundsichen in einer Ebene liegen; sie sind demnach einander gleich. Der Korper ABCFED ist demnach der Summe der dren Pyramiden BC, EABC, FABC) gleich, welche die gemeinschaftliche andfidche ABC, und ihre Spizen in D. E. F, haben.
 - 4): Die die Seitenlinien DA, EB, FC parallel sind, so. sind sin auch gegen die Grundsidde ABC unter gleichen Winzelen geneigt. Es sen/der Reigungswinkel einer jeden dieser Linien zogen die Grundsidde = µ.; alsbann ift, wie man leicht, einsehen wird, die Höhe der Ppramide DABC = DA Sin., µ, die Höhe der Ppramide EABC = EB Sin., µ, und die Höhe der Ppramide FABC = FC Sin. µ, Man hat demuach

bemnach Bor. DABC = ‡ ABC. DA Sin. u., Por. EABC = ‡ ABC. EB Sin. u., Por. FABC = ‡ ABC. FC Sin. u.; folglich ben kubischen Inhalt des abgekürzten Prismas ABCFED = 1

$$\triangle ABC \cdot \frac{DA + EB + FC}{3} Sin. \mu.$$

D. h. man findet den Juhalt eines folden Körpers, wenn man ben dritten Ebeil von der Summe seiner Seitenlinien mit dem Sinus ihres Reigangswinkels gegen die Grundflache, und mit dieser Grundflache selbft multiplicirt.

Bus. Steben die Seitenlinien auf der Grundfiche pers penditular, so ist u = 90°, und man findet den Inhalt bes abgefürzten Prismas

$$= \triangle ABC \cdot \frac{DA + EB + FC}{5}$$

§ 161.

Mit Sulfe flatifcher Principien lagt fic der Aufgabe bes worigen So eine betrüchtliche Erweiterung geben. Die Gage, Die man hierzu wiffen muß, find folgende:

1) Wenn eine gerade ober frummlinige ebene Figur in eine unbestimmte Anzahl beliebiger Lheile getheilt wird: so ift die Summe der Produkte, welche entstehen, wenn man seden dieser Theile mit der Entsernung seines Schwerpunktes von irgend einer beliebigen, aber unverdnderlichen Sbene multiplis eine, dem Produkte gleich, welches man erhalt, wenn man die ganze Figur mit der Entsernung ihres Schwerpunktes von jener Sbene multiplicitt; oder, wie man sich in der Statifausdruckt, die Summe der Momente aller einzelnen Pheile ift dem Momente der ganzen Figur gleich.

Đ

Diefen San findet man in allen Lehrbachern ber Statit erwiefen.

- , 2) Die Entfernung bes Schwerpunktes eines jeden Dreys eds von irgend einer Ebene, ift dem dritten Theile der Sums me der Entfernungen seiner drey Spigen von dieser Ebene gleich.
- 3) Der Schwerpuntt einer jeden ebenen Afgur liegt mit bem Schwerpuntte ihrer Projektion auf irgend eine Ebene imis mer in einer geraden Linie, welche auf der Projektionsebene perpendikular ftebet.

Der Beweis des zweiten und dritten Sages tann fo ger fahrt werden.

Beweis des zwenten Sates. Hon den brey Spitsgen A, B, C, (Fig. 69) irgend eines Orenedes ABC ziehe man auf eine willtührliche Sene LMPQ die Perpendikel Aa, Bb, Cc, welche die Entfernungen jener drey Spitsen von dies ser Seine find; die Punkte. a, b, c, geben das Orened abc. Man halbire die Linien AB, ab, in D, d, und ziehe CD, cd; alsbann ift Dd den Linien Aa, Bb, parallel, und man hat daber, wie bekannt,

 $Dd = \frac{1}{4}(Aa + Bb),$

Man nehme nun DE = \(\frac{1}{2}\) CD, do = \(\frac{1}{2}\) cd, und siehe Eo; alsdann find E, o, die Schwerpunkte der Orenecke ABC, abc, und die Linie Eo ist den Linien Cc, Dd, parastel, also auf der Seene LMPQ perpendikuldr. Man siehe nun Cf der cd parastet; hierdurch entsteden die ahnlichen Orenecke DfC, EgC, und diese geben, CD: CE = Df: Eg, also Eg = \(\frac{1}{2}\) Of = \(\frac{1}{2}\) (Dd - Cc) = \(\frac{1}{2}\) Dd - \(\frac{1}{2}\) Co. Oa nun Eo = Eg + go = Eg + Cc, so hat man,

Ee = 1 Dd + 1 Cc.

Bird bierin far Dd fein vorbin gefundener Berib gefest, fo erhalt man,

$$E_0 = \frac{1}{3}(Aa + Bb) + \frac{1}{3}Cc = \frac{Aa + Bb + Cc}{3}$$

Aus diesem Beweise erhellet auch, daß die Linie Ea, melde den Schwerpuntt des Dreneds ABC und den feiner Projeftion abe verbindet, auf der Projettionsebene perpenditular Rebe.

Beweis des dritten Sapes. Es sen ABCDE (Jig. 70) irgend eine geradinige ebene Jigur, hier ein Junsed, und abodo die Projektion derielden auf eine Ebene LM!Q. Man, denke fich, die Jigur ABCDE auf eine beliedige Art in Orens este AEB BEC, CED, gerheilt, und die Jigur abodo in eben so viele, jenen korrespondirende Orensede, and, dec, ced: also dann ist nach § 158, wenn a den Reigungswinkel der Ebenen ABCDE, LMPQ bezeichnet, Saeb = SAEB. Cos. a, sdec = SEC. Cos. a, und daher Saeb: Sbec: Sced = SEC: SEC; SCED, und Erap. ABCE: Erap. abco = SCED: Sced.

Es seven P, Q, die Schwerpunkte der Drepede AEB, BEC, und p, q, die Schwerpunkte der korrespondirenden. Drepede seb, bec. Ziehet man die kinien Pp, Qq, so sind, wie vorhin gezeigt worden, diese kinien auf der Stan ziehe nun PQ, pq, und theile diese kinien in R und r so, daß PR: QR im ABEC: AEB, und pr; qr — Abec: Aseb, also auch PR: QR — pr: qr, und daher die kinie Rr den kinien Pp, Qq, parallet, also auf der Stene LMPQ perpondikuldr. Und der Art, wie versahren worden, ift aber klar, daß R der Schwerpunkt des Viereds ABCE, und r der Schwerpunkt

bes Biered's abor ift; hemnach gilt ber Cap auch fur das Biered ABCE.

Es seinen nun S, s, die respektiven Schwerpunkte ber Orenecke CDE, cde, und SR, sr, gezogen, ferner diese Linien in T, t, so getheist, daß Biereck ABCE: CDE = ST:TR, und Biereck abce: Cde = st: tr, also auch ST:TR = st: tr; alsdann ist die Linie Tt den Linien Rr, Ss, parallel, also auf der Seene LMPQ perpendikutar. Die Punkte T, t, sind aber nichts anders als die respektiven Schwerpunkte der Figuren ABCDE, abcde; demnach gilt der Sas auch für Fünfecke.

Auf die namliche Art tonnte man Diefe Schluffe fortfegen, wenn die Figur mehr als funf Seiten hatte; der Sat gilt also fur alle Bielede.

Jeve krummlinige Figur kann als ein Rieled von unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten, angesehen werden; also gilt ber Sah auch fur alle krummlinige Figuren.

\$ 162.

Aufg. Den Inhalt eines jeden geraden oder schiefen abgekurzten Prismas vermittelft des Schwerpunttes zu finden.

Aufl. 1) Es sen suerft ABCabo (Fig. 6g) ein breps seitiges und gerades abgetürztes Prisma, abo seine Grunds sidde; so ift nach \$ 160 Just. der Inhalt desselben = Aa + Bb + Co. Die Seitenlinien Aa, Bb, Co, sind aber nichts anders als die Entsernungen der Orepecksspissen A, B, C, von der Ebene der Grundsidde; ist demnach E der Schwerpunkt des Orepeckes ABC, und a der des Orepeckes abo, so ist, nach dem vorigen S, Ed = $\frac{Aa + Bb + Cc}{B}$, solge

lich ber Inhalt bes Korpers = And . Ee. Man findet alfo, ben Inhalt eines brenfeitigen und geraden abgefürzten Prif. mas, wenn man die Grundfliche mit ber Entfernung ihres Schwerpunftes von dem Schwerpunfte ber ihr gegenüber lies genden Flache multipficitt.

2) Es foll nun gezeigt werden, daß dieser Sas and far jedes andere abgefürzte Prisma gitt. Es sen 3. B. ABCDEabede (Kig. 70) ein solches fintseitiges Brisma abede seine Grund, sidche. Man zerlege zu dem Ende die obere Fliche deffetben auf eine betiebige Art in die Orenede AEB, BEC, CED, wie auch die Brundfliche in die, ienen torrespondirenden Oren, ede, aeb, bed, ced. Sind nun P, Q; R, p, q, r, die Schwerz punkte ber respettiven Orenede AEB, BEC, CED, aeb, bod, wid jest ist was fo eben bewiesen worden.

abget. Prisma AEBaeb = \triangle aeb . Pp. abget. Prisma BECbec = \triangle bec . Qq. abget. Prisma CEDced = \triangle ced . Se.

und baber das abgefürste Prisma ABCDEabcde

= \triangle aeb . Pp + \triangle bec . Qq + \triangle cad . Ss.

Es if aber, wenn a den Reigungswinkel der Svene der Kiegungswinkel der Svene der Kiegungswinkel der Svene der Kiegungswinkel der Svene der Kiegungswinkel der Svene der Siegen der Grundfiche bezeichnet, nach § 158, ab = AEB. Cos. a, bec = ABEC. Cos. a, cos. a, cod = ACED. Cos. a, man hat also auch den Inhalt dieses Körpers

(ΔAEB. Pp + ΔBEC. Qq + ΔCED. S8) Cos. α. Wenn nun T, t, die Schwerpunkte ber Figuren ABCDE, abode find, so ift § 161 Tt auf der Cbene der letteren perpendikular, und man hat

(\triangle AEB · Pp + \triangle BEC · Qq + \triangle CED · Ss) Cos. α = α = ABCDE · Cos. α · Tt = abcde · Tt (§ 158)

Demnach ift bas abget. Brifma

ABCDEabcde = abcde . Tt.

Du der hier für den füntseitigen Korper geführte Semeis nichts enthalt? was nicht auf jedes vielseitige Prisma anwends bar ware; so lagt fic daraus schlieben, daß der Inhalt eis wes jeden geraden abgefürzten, Prismas gefunden wird, wenn man seine Grunostäche mit der Entsernung ihres Schwerpunkt tes von dem Schwerpunkte ber ihr gegenüberliegenden Ridche multipliciet.

- 3) Es fen nun ABCDA'B'C'D' (Fig. 71) irgend ein abe geturates fchiefes Drifma, abed ein auf den Seitenlinien bef felbem fentrechter Schnitt, T ber Schwerpunft ber oberen, und T' der ber unteren figde, ferner t ben Comerpunft bes Schnitten. Der Schnitt abed, tann ale Die Projettion fomabl ber Flade ABCD, ale ber Glade A'B'C'D' angesehen wers ben; bemnach ift fowohl Tt als T't auf abcd perpenditular, (f 161) und daber TtT' eine gerade Linie Rach 2 tft aber ber Inhalt bes geraden Prismas ABCDabed = abcd . Tt, und . ber Inhalt bes Drifmas A'B'C D'abed = abed . T'i; folge lich ift der Inhalt des ichiefen Brismas ABCDA'B'C'D' = abed . (Tt + T't) = abed . TT'. Der Inhalt eines ichiefen Prifmas wird alfo gefunden, wenn man ben fentrechren Schnitt beffelben mit ber Entfernung bes Schwerpunttes feiner Brunde flace vom Schwerpuntte ber ihr gegenüber liegenden glache multiplicirt.
 - 4) Aus a und 3 ergiebt fich nun ber allgemeine Sag: Daß der Inhalt eines jeden geraden oder ichiefen Drift mas, dem Produtte aus einem, auf fejnen Seitenlinien fentrechten Schnitt in die Entfernung der Schwerpunkte feiner beyden Grundflachen, gleich ift.

Erft. Buf. Wird ber Reigungswintel einer jeben Gele

tenlinie gegen die Sene ABCD = μ , und der gegen die Sene A'B'C'D' = μ ' gesegt, so ift, wie man leicht einsehen wird, abcd = ABCD 8in. μ = A'B'C'D' 8in. μ ', und dag her der Inhalt des abgehörzten Prismas = ABCD. TT'. 8in. μ = A'B'C'D'. TT'. 8in. μ '. Der Inhalt kann also durch das Produkt einer der Grundsichen in den Sinus ihres Netzungswinkels gegen die Seitenlinie, und in die Eutsernung ihres Schwerpunktes vom Schwerpunkte der ihr entgegengesesten Klache ausgedrückt werden.

3 mant. Buf. Da jede frumme Linie ale ein Bieled von unendlich vielen Seiten betrachtet werden kann; fo gelten biefe Sage auch fur folde prismatische Korper, beren Grunde flachen trummlinige Figuren find.

§ 16z.

Aufg. Die Oberfläche eines abgefürzten Prifmas 38 finden.

Aufl. 1) Es sen ABCDabed (Tig. 72) irgend ein gerades vielseitiges abgetärztes Prisma. Man halbire AB, BC,
CD, 2c. ab, bc, cd, 2c. in P, Q, R, 1c. p, q, r, 2c. und ziebe die Linien Pp, Qq, Rr, 2c.; so werden diese Linien den
Seitentinien des Prismas Aa, Bb, Cc, 2c. parallel senn.

nicht mitgerechnet,) bestehet aus den Trapezen ABba, BCcb, CDdc, 2c. Es ift aber Trap. ABba = Lab (Aa + Bb), Prap. BCcb = Lbc (Bb + Cc), Trap. CDdc = Lcd (Cc + Dd) u. f. w. Demnach ift die gesuchte Elsche =

 $\frac{1}{2}ab(Aa + Bb) + \frac{1}{2}bc(Bb + Cc) + \frac{1}{2}cd(Cc + Dd) + ic$

3) Run ift, wie befame, & (Aa + Bb) = Pp, & (Bb + Cc) = Qq, & (Cc + Dd) = Rr, ic; man hat also auch ben folgenden Ausbruck fur bie Flace:

ab . Pp + bc . Qq + cd . Rr + u.

- 4) Die Punkte P, Q, R, 1c. p, q, x, 2c. find aber nichts anders als die Schwerpunkte der Linien AB, BC, CD, 1c. ab, bc, cd, 1c, also ab. Pp, bc. Qq, cd. Rr, 1c., die Romens te der Linien ab, bc, cd, 1c., in Beziehung auf die Schene gbcd, und nach der Richtung der Seitenlinien genommen. In daher V der Schwerpunkt der gebrochenen Linie ABCD, und v der Schwerpunkt der gebrochenen Linie abcd, so ift Vv den Seitenlinien des Körpers parallel, und man hat, ab. Pp + bc. Qq + cd. Rr + 1c. = L × Vv, wenn L die Peripherte der Figur abcd bezeichnet. Die gesuchte Alde ift beninäch bem Produkte aus der Peripherie der Grundsstäde in die Entfernung ihres Schwerpunktes vom Schwerpunkte der ihr gegenüberliegenden Ilache gleich.
- 5) Es fen nun ferner A/B'C'D' irgend ein schiefer Schnitt des Prismas, und V' beffen Schwerpunkt, welcher als so in der Linie Vv liegt, so findet man wie in 4 die Flace des abgekützten geraden Prismas A'B'C'D'abed = L. Vv.
- 6) Aus 4 und 5 erhalt man die Flace des abgefürzten schiefen Prifmas ABCDA/B/C'D' = L × (Vv V'v) = } L × VV': ste wird demnach gefunden, wenn man die Pex ripherte des auf 'den Seicentinten perpendiktären Schnittes mit der Entfernung der Schwerpunkte seiner benden Grundside den multivliciert.
- 34 f. Da jebe frumme Linie als ein Polygon von unende lich vielen Seiten angesehen werden tann, so gitt bas Befagte auch fur abgefürzte prismatische Korper mit trummlinigen Grundflichen.

5 164.

Man ftelle fich vor, die Figur A'B'C'D' (Fig. 72 und Fig. 72) rude langs der Geitentinien des Prifmas fo lange hinauf, bis fie auf ABCD falle; fo befchreibt ben diefer Be-

wegung in Fig. 72 der Schwerpunde T' ber Stundstäche A'B'C'D' die Linie T'T, und in Fig. 72 der Schwerpunkt W'thres Berimeters die Linie V'V. Indem aber die Figue A'B'C'D' hinaufräckt, gehet fle nich und inich duch alle Punkte der Korpers, und jugletch ihr Verimeter durch alle Punkte seiner Fläche; man kann daher sahen; die Fläche A'B'C'D' beschreibe den Korper, und die gebrochene Linie A'B'C'D' die Fläche desselben, und in dieser hinscht diese die erzeugende Linie und jene die erzeugende Fläche wennen.

Mit Sulfe diefer Benennungen laffen fic num Ble in § 262 und § 163 gefundenen Rejultate auf die folgende Art ausbruden:

- 1) Der Inhalt eines jeden abgekürzten' prismatis schen Korpers ift dem Produkte aus dem senkrechten Schnitte in den Weg des Schwerpunktes der erzeugendem Glache gleich.
- 2) Die Slache eines jeden abgekürzten prismatischen Borpers, (Die beyden Grundslachen nicht mitgerechnet,)
 ist dem Produkte ans der Peripherie des senktechtete Schnittes in den Weg des Schwerpunktes der euzengens den Linte gleich.

Heraus folgt, bif wenn bie obere ober antere Suntifice de fich um ben Schwerpunte ihrer Flidde auf jebe beliebige Art brebet, baburch ber Inhalt bes abgefürzten prifinabischen Rorpers weber größer noch kleiner wird, und bag bas Name liche für die Rache bes Abrpers gile, wenn sich die Grundflachen um die Schwerpuntte ihrer Peripherien breben.

\$ 165.

Aufg. Den Inhalt eines jeden Berpers aus den ber Tannten Schwerpuntem feiner Grangfachen ju finden.

Mufl. Man laffe von allen Expuntten bes Rorpers Ber-

penditet auf eine, nach WMThr angenommene Sbene herab, und berechne alle hierdurch entstehende abgefürzte Prismen nach dem vorigen ist indem man udmlich die Projektion einer seden Eranzsiche mit der Hohe ihres Schwerpunktes über der Ebes we, umltipliefer; die algebratiche Gumme aber dieser, Produkte glebt alsdann den Inhalt des Körpers.

XIII. Runde, ringformige und frumme Rorper.

§ 166.

Aufg. Den Inhalt und die Oberfläche eines parali lel mit der Grundfläche abgetarzten Regels zu finden.

Enst. In § 101 wurde ber Inhalt einer parallel mit Der Erundstäche abgetärzten Koramide, = ih(G+g+1/Gg) gestunden, wo G, g, h, die beyden Grundstächen und die Hohe bezeichneten. Der Legel kann als eine Hyramide von um endtich vielen Geisen angesehen werden; die Formel gift also and für den abgekärzten Legel.

Es fen nun der Salbmeffer der einen Grundflace = R, und der Salbmeffer der anderem = x; so ift $G = \pi R^2$, $g = \pi r^2$, und daher auch der Inhalt des abgefürzten Regels = $f \pi h [R^2 + r^2 + Rr]$.

2) Se sen PQpq (Rig. 73) der abgefürste Regel, SPQ ber gange Regel, su welchem er gebort, die Seite Pp des abger farzten Regels im so und feine Ergaumig pS zu der des gangen mit mit befannt, die

Sidde des Regels Spa = xrx, und die bes Regels SPQ = xR (s + x); also die Flace des abgefützten Regels, die Grundflachen nicht mitgerechnet, = x[R(s + x) - xx].

Sind nun C, c die Mittelpunkte der benden Kreise, so ist CP: cp = SP: sp, oder R: r = x + s: x; solgtig $x = \frac{rs}{R-r}$. Substitutet man diesen Werth in den vorigen Ausstruck, so erhält man die Fläche des abgekürzten Regels $x = \frac{R^2 - r^2}{R} = x s (R + r)$.

\$ 167.

Aufg. Den Inhalt und die Oberfläche einer Bugel. Bone und eines Bugelabichnittes zu finden.

AFB (Big. 74) fen ein Salbfreis über AB, E Deffen Mittelpuntt, ABCD ein Rechtedt uber AB, feine Sobe bem Salbmeffer gleich, F ber Berührungspuntt ber Linie DC und des Salbfreifes; es fen ferner DE, CE, EF, gezogen, wie auch KG ber AB parallel; fle ichneidet ben Salbereis in a, b, Das Drened DEC in d, o, und die Lime EP in f. Die gafie se Riche brebe fic um EF, fo befchreibt bas Rechted ADFE einen Enlaiber, per Quadrant AFE eine Salbtugel, das Dreb. ed DFB When Rogel) und Das Drened DAE einen hobien eunden Corper: 3m ber Clementar . Geometrie wird nun wegeigt, daß der Inhalt des gangen bobien Storpers ber ganlen Salbtugel, und berjenige Bheit beffelben, welcher burch bas Erapes ARdE beidrieben mirb, ber burd AafE beftbriebenen Bone gleich fen; daß ferner die Oberflache ber gangen Beib-Engel ber burd AD befdriebenen Enlinderflache, Die Oberflade ber Sone, welche aus An entflebet, ber burd AK beidrien benen Enlinderflache, und der Augelabidnitt, melder aus bet Umbrebung bes Segments aff entftebet, ber burd DK beidrieBenen Enlinderfidde, gleich fen. Ce kommt nun darauf an, welche Stude man ale gegeben anflehet, um das Uebrige au bestimmen. Ich will Et und den halbmeffer ber Rugel für gegeben annehmen, und Et = h, ben halbmeffer = r fegen. Man verfahrt nun wie folgt.

meffer seiner Grundsidde ift df = fE = h, und seine Hobbe weffer seiner Grundsidde ift df = fE = h, und seine Hobbe ebenfolio = h, also sein Inhalt = $\frac{1}{4}xh^3$. Der Inhalt des Eplinders ABGK ist = xr^2h ; also der Judalt des durch das Erapez AKdE beschriebenen Körpers = Epl. AKGB — Res gel dEc = $xh(r^2 - \frac{1}{4}h^2)$ Es ist folglich auch der Inhalt der durch AafE beschriebenen Zone AabB

$$= \pi h (r^2 - \frac{1}{2}h^2).$$

2) Wird diese Bone von der Halblugel AFB abgezagen, beren Inhalt = 3 xx2, so erhalt man den Inhalt des Rugels abschnittes afb

 $= \frac{1}{2} \times (2x^2 - 5x^2h + h^2) = \frac{1}{2} \times (x - h)^2 (2x + h),$ Ther Rugetabschmint aFb, is demnach so groß als sin Regel, weicherheisen mit, Ff = $(x - h)^2$, als Palbungser beicherbes men Arels zur Grundsiche, und 2x + h auf Sobs bat.

5) Die Derfliche der Zwe AabBift der Oberfliche des Enlinders ABGK gleich. Da nun diese 30 2016, so ift auch bie Doerfliche der Zone AabB

= 2 x r h.

4) Die floch, des Augelabichnitts ab erfdit man, wenn man von der Oberfloche ber Salblugel = 2xx2, die floche der Jone AabB abgiebet. Demnach ift die floche pes Augels abichnitts abb

$$= 2 \alpha r (r - h).$$

Deutt man fich nun die Gebne al gezogen, fo if

 $aF^2 = 2x$, Ff = 2x(x-h), und demnach die Oberfläche des Augelabschnittes $aFb = x \cdot aF^2$, also einem Areise gleich; welcher mit dem Halbmesser aF beschrieben worden.

. \$ 168.

Aufg. Den Juhalt eines Breisrunden Augelausschnistes, wie auch den tiner Rugelppramide gu finden.

Aufl. 2) Beb der Umbrehung der Rig. 74 um EF ber schreibt der Kreisausschnitt aEF einen Augetausschnitt. Da man fic denselben aus lauter unendlich kleinen Brramiden, welche die Elemente der Rugelfide aFb zur Grundfiche, und ihre Spigen in E haben, susammengesest denken kann; so fins det man den Indalt eines solchen Augetausschnitts,' wenn man die Augelfide aFb mit dem dritten Ebeile des Halbe meffers der Auget multiplicirt. Nach dem vortgen S ift aber die Augelfidche aFb = 2 ar (r - h); man sindes also den Indalt des Augelausschnittes

-2) Denkt man fic auf der Oberfidche einer Augel ein sphärtiches Vieled beschrieben, und nach den Winkelspipen deskeben Halbmeffer gezogen, so entstebet der Korper, den man eine Augelppramide nennt; seine Grundsidde ist die krums me Fidche des sphärischen Vieleds, und seine Spige der Mitstelpunkt der Augel. Die Seitensidden dieses Korpens sind sanster Areisausschnitte; die Neigungswinkel ihrer Eienen sind nichts anders als die Winkel des sphärischen Vieleds. Nennt man s die Summe dieser Winkel, so ist nach S so die Fisch de des Vieleds wieles $\frac{s-(n-2)\,180^{\circ}}{720^{\circ}}$ s, wo S die Oberfiche der ganzen Augel $= 4 \times 2^{\circ}$ bezeichnet. Multiplicirt man diese

fen Ausbrud mit gr, fo erhalt man ben Inhalt ber Mugete boramite,

$$\frac{s + (n-2) 180^{\circ}}{540^{\circ}} r^{\circ}$$

§ 16g.

Aufg. Wenn ein Drevedt mit einer geraden Linig in einer Ebene liegt, und die Ebene fich um diese gerade Linie als um eine Ure drebet, so beschrzibt ber dieser Umdrehung das Dreveck einen ringformigen drevkantigen Korper: man soll den Inhalt eines folchen Körpers finden.

Mufl. 1) Es sen ABC (Fig. 75) irgend ein Dreped, MN eine Linie von beliebiger Lage; Aa, Bb, Ca, seven drep Berpendikel auf der Linie MN. Wenn die Ebene der Figur sich um die Linie MN als Are drebet, so beschreiben die Tras peze AabB, BbcC, AacC, drep abgekürzte Leget, das Oreped ABC aber den ringformigen Körper, dessen Inhalt gesucht wird; man erhält diesen Inhalt, wenn man von der Summe der zwep ersten Legel den driften abziehet.

D'Man fest, der Kurze wegen, Az = à, Bh = b, 1Co = a, ab = h, bc = 1; alsdamn ift nach § 166 der Juschaft des abgefürzten Legels AabB = \frac{1}{2}\pi h (a^2 + ab + b^2), des abgefürzten Legels BbcC = \frac{1}{2}\pi k (b^2 + bc + c^2), des abgefürzten Legels AacC = \frac{1}{2}\pi (h + 1) (a^2 + ac + c^2); des abgefürzten Legels AacC = \frac{1}{2}\pi (h + 1) (a^2 + ac + c^2);

$$= \frac{1}{2} \pi h (ab + b^2 - ac - c^2) + \frac{1}{2} \pi l (b^2 + bc - a^2 - ac)$$

$$= \frac{1}{2} \pi h (b - c) (a + b + c) + \frac{1}{2} \pi l (b - a) (a + b + c)$$

$$= \frac{a + b + c}{5} [h(b - c) + l(b - a)].$$

g) Es ift aber der Juhalt des Krapeges AndB = $h \cdot \frac{a+b}{a}$

bes Erapeges BbcC = 1. bfc, bes Erapeges AacC =

 $(h+1)\frac{a+c}{2}$, und daher,

 \triangle ABC = Exap. AsbB + Exap. BlocC - Exap. AsoC $= \frac{h(b-c) + l(b-a)}{2};$

folgito $h(b-c) + l(b-a) = 2 \triangle ABC$.

4) Bird das, was hier jur Rechten ftebet, far das was gur Linken flebet, in dem in 2 gefundenen Ausbrud fubfit tuirt, so erhalt man ben Inhalt des ringformigen Korpers

$$= 2 \times \triangle ABC, \frac{a+b+c}{3}.$$

Der Körper ift also einem Prisma gleich, beffen Grunds fidche das Dreped ABC ift, und deffen Sobe = $2 \times \frac{a+b+c}{3}$.

Bus. If 8 ber Schwerpuntt des Drenecks ABC, und So auf MN perpenditular, so ift nach dem zweptem Sag in § 161 So = $\frac{a+a+c}{3}$; folglich der Juhalt des Körpers

Da nun 2 x . So die Peripherie eines mit 8a beschriebenen Areises ift, so ift der Inhalt des ringformigen Korpers auch einem Prisma gleich, bessen Grundfide das Dreped ABC, und bessen Sobs die Peripherie diese Areises ift.

\$ 170.

Aufg. Den Inhalt eines jeden Körpers zu finden, welcher burch die Umdrehung einer ebenen geraden oder Brummlinigen Sigut um ihre Are entstehet, unter der Dor: aussenung, daß der Schwerpuntt und der glacheninhalt biefer Sigur ichon bekannt sey.

Aufl. 1) Es, fen ABCDEF (Fig. 76)_irgend eine gerade finige ebene Ligur, bier ein Sechsed; LM eine gerade Linie, melde mit ibt in einer Chente liegt. Drebet fic bie Rigur um die Linie LM als um eine Are, fo beschreibt jedes ber Prepede ABC, ACF, u. f. w., in welche die Rigur gerlegt werden tann, einen folden drentantigen ringformigen Rorper, mie er im porigen S berechnet worden. Die Summe aller Diefer Ringe giebt ben gangen Ring, welcher burch die Ums drebung des Bieled's ABCDEF erzeugt wird. Sind nun P, O. R., u. f. w. die Schwerpuntte ber respettiven Drenede. V der Schwerpunte der Figur ABCDEF, ferner Vv, Pp, Qq, Rr, u. f. w. auf LM perpenbituldr; fo ift nach dem a. D. der Inhalt bes Korpers, welcher durch das Drened ABC erzeugt' mirb, = 2 x . ABG . Pp, ber welcher burch bas Dreved ACF erzeugt wird, = 2x. ACF. Qq, u. f. m.: folglich ber Inhalt bes gangen Rorpers

= #x'(\(\triangle ABC.Pp + \triangle ACF.Qq + \triangle FCD.Rr + 1c.)
Das, was hier in Klammern eingeschlossen wird, ift aber nach dem ersten Sage in § 161 = Polyg. ABCDEF x Vv;
man hat also den Inhalt des gesuchten Körpers

= 9x. Vv. Poing. ABCDEF.

Es ift aber 2x. Vy die Peripherie des Areises, welchen der Schwerpunkt der Figur ben der Umdrehung beschreibt; man findet also den Inhalt des durch das Bielest ABCDEF bes schriebenen Körpers, wenn man den Inhalt deffelben wit der Peripherie des Areises multiplicirt, welchen ihr Schwerpunkt beschreibt.

2) Jede krummlinige Figur kann als ein Bieled von ums endlich

endlich vielen ndendlich Keinen Geiten angesehen werben; mag findet also auch den Inhalt eines durch eine krummlinige gie gur erzangten Könpers, wenn man den Inhalt dieser Figur mit der durch den Schwerpunkt beschriebenen Kreisperipherie multiplicirt.

Bus. Hieraus folgt, daß in jedem Falle ber burch die Umbrebung einer Ligur um eine Are erzengte Korper, einem prismatischen Korper gleich ift, deffen Grundfidche die erzem gende Figur, und beren Dobe die durch den Schwerpunkt ber schriebene Kreisperipherie ift.

\$ 171.

Aufg. Die Frumme glache eines Borpers zu finden, welcher durch die Umdrehung einer genade oder Frumme. Unigen Sigur um eine feste Ape erzeuge wird.

Aufl. 1) Es fen ABCD... (Fig. 77) die Figur, welche fich um. die Linie LM als Are drehet, und so den ringförmitigen Körper beschreibt, bessen Oberfläche gesucht wird. Um diese zu finden, darf man nur die abgefürzten Kegelflächen besechnen, welche durch die Linien AB, BC, CD, u. s. w. berschreben werden; die Summe aller dieser Regelflächen giebt alsbann die Oberfläche des ganzen Körpers.

2) Nun ift aber, menn auf LM die Perpendikel Aa, Bb, Cc, Dd, u. s. w. gezogen werden, die durch die Linie AB. beschriebene abgekürzte Kegelsiche = x. AB (Aa + Bb) (§ 166); die durch BC beschriebene = x. BC (Bb + Cc); die durch CD beschriebene = x. CD (Cc + Dd); u. s. w.; solgelich die Obersiche des ganzen Körpers =

$$\alpha$$
[AB(Aa+Bb)+BC(Bb+Cc)+CD(Cc+Dd)+1c.]

3.) Berben die Linien AB, BC, CD, m. f. m. in P, Q, B, n. f. w. halbist, und aus Diesen Punten auf "L.M. die Per-Bermetrie II.

penditet Pp, Qq, Rr, u. f. w. gesogen, so tast fich teitie de weisen, bas Aa + Bb = 2. Pp, Bb + Ca = 2. Qq, Cc + Dd = 2. Rr, u. f. w. Man kaun demnach die ger suchee Flache und so ausdruden:

2π [AB . Pp + BC . Qq + CD . Rr + λt.].

4) Die Punkte P, Q, R, n. s. w. find nichts anders als die Schwerpunkte der Linien AB, BC, CD, u. s. w., und dar her AB. Pp, BC. Qq, CD. Rr, u. s. w. die Momente dieser Linien in Beziehung auf LM. Es seif nun V der Schwerpunkt der Peripherie ABCD..., d. h. der Schwerppunkt der Figur, in so fein die Seiten derselben AB, BC, CD, id. allein als schwer ungesehen werden; so ift, nach den Scundlebren der Statif,

AB.Pp + BC.Qq + CD. Rr + it. = V × Weriph. ABCD..

5) Aus 3 und 4 erbalt man alfo fur die frumme Flace bes, burch die Figur ABCD... befdriebenen Korpers ben Ausbruch,

Bx . V+ x Beriph ABCD ... ;

- d. 6. man findet diefe Flache, wenn man die Peripherie ABCD.... mit, der Peripherie ines, mit dem Halbmeffer Vv beschriebenen Kreises multipliciet.
- 6, Da ferner jede trummlinige Figur als eine gerablinige bon unendlich vielen unendlich fleinen Geiten angeseben werden tann, fo gilt bas, was bier gesagt worden, auch fur jer ben burch eine krummlinige Figur beschriebenen Rorper.

\$ 172.

Aus \$ 170 und 171 ergiebt fic die folgende Regel:

Die Flace ober der Adrper, die durch die Umbres hung einer Linie ober Kigur um eine feste Ape erzeuge werden, werden durch das Produkt der erzeugenden Große (Linie ober Slache) in den Weg ihres Schwere, punftes ausgedrückt,

Diefer Sas heißt gewöhnlich Gulbins Regel, weit Gulbin, ein Jesuit aus St. Gallen geburtig, ihn in feinem Werke die ventro gravitatis 1635 — 1642 vorgetragen, und auf viele Fälle angewandt hat. Er findet sich aber auch schon in des Pappus mathem. Sammlungen. (M. f. Alügels masthem. Wörterbuch, Artifel centrobarych methodus, I. Lh. S. 428.)

Nebrigens ift leicht einzusehen, daß, um die Aldce ober den Inhalt des Korpers ju finden, welcher entftehet, wenn die erzeugende Linie oder Figur nicht die ganze Umbrehung, sons dern nur einen Eheil dersetben vollendet, die erzeugende Linie oder Aldce nur mit dem Gogen multiplirirt werden muß, welchen der Schwerpunkt beschreibt.

\$ 173.

Es laffen fic aus der Guldinischen Regel verschiedene, theils nugliche, theils schone Folgerungen gieben, von benen ich nur die folgenden anführen will.

- 1) Die beschreibende Figur sein Kreis, sein habenesser = r. Bekanntlich ift ber, Mittelpunkt eines Leises sowies swohl der Schwerpunkt seiner Blache, als seiner Peripherik. Sest man seine Entsernung von der Ambrehungsare = a. so ift der durchkausene Weg desselben ben der gangen Umdresseng = 2xa, und daher der Inhals des beschriebenen Körspers = xr².2xa = 2x²x²a, und seine Flache = 2xx.2xa = 4x²xa.
- 2) Die beschreibende Figur sen vegulares Vieled, die Amgahl seiner Seiten = n, und der Halbmeffer des Kreises; worin es beschrieben werden kann = x3 folglich der Inhalt

beffelben = Inra Sin. 3600, und bie Peripherie 2 nr Sin. 3800.

Der Schwerpunkt sowohl der Klache, als des Umfangs eines reguldren Wieled's ift der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, Sett man daber die Entfernung dieses Aunktes' von der Umdrehungsare = a; so ift der Inhalt des beschriebenen Köts. pers = inr Sin. $\frac{360^\circ}{n}$. $2 \times a = n \times r^2 a$ Sin. $\frac{360^\circ}{n}$, und seise

ne flice = $4 n \times a r \sin \frac{180^{\circ}}{n}$.

3) Es sen ABC (Fig. 78) irgend eine krumm, ober gerade linige aus swey ahnlichen und gleichen Halften ABD, CBD, bestehende Figur, P der Schwerpunkt der einen Halfte ABD, und Q ber Schwerpunkt der andern Halfte BCD, glio die, Linie PQ auf der Are BD der Figur perpendikular.

Es sep ferner LM die Umbrehungsare Pp, Qq, auf ihr perpendikulär, und Qn ihr parallel. Bezeichnet man nun den Inhalt der ganzen Figur durch F, so ift der Inhalt des, durch die Adftee ABD beschriebenen Körpers, = 2x. Pp × ½F, und der Inhalt des, durch die Adlite BCD beschriebenen Körpers, = 2x. Qq × ½F; folglich die Differenz dieser bep. den Körper = 2x (Pp — Qq) × ½F = x. Pn × F. Die Differenz der, durch die benden Halten beschriebenen Körper, ift demnach dem Produkte der ganzen Figur in die Peripherie eines Kreises gleich, dessen Durchmesser die Differenz zwischen den Entsernungen der Schwerpunkte dieser Halften von der Umdrehungsare ist.

If die Are der Figur BD der Umdrehungsare LM par tollel, so fallt Qq auf Pp, und Pn gehet in PQ über; für diesen Kall ift also die Differens der, durch die Hälften ABD, BCD, beschriebenen Körper ma . PQ x F. Wean taffe nun BD fethft die Umbrehungsare sein, amb die Figur ABD sich um diese Linie dreben; so entstehet ein runder Körper, dessen Inhalt gefunden wird, wenn nihm die Figur ABD mit dem Wege ihres Schwerpunktes P multiplisties? er ist also = x \(\text{FV} \times \frac{1}{2} \times \text{FV} \times \frac{1}{2} \times \text{FV} \times \frac{1}{2} \times \text{FV} \times \frac{1}{2} \times

4) Man bente sich jest P (Fig. 78) als den Schwerpunkt der einen Schwerpunkt der einen Schwerpunkt der ander ren Kaisse BC, der krummen oder gebrochenen Linie ABC; so ist wieder PV auf BD perpendikukt; nnd PV = VQ. Sen der Umdrehung der gebrochenen oder krummen Linie ABC, der ren Lange ich = H seze, um LM als Are, beschreibe die Halle ich sie Flache, deren Inhalt = 2x. Pp' × LH, und die Kalste BC eine Flache, deren Inhalt = 2x. Qq × LH. Die Otsserns dieser beyden Flachen ift also = x (Pp — Qq) × H = x . Pn × H. Sie wird daher gesunden, wenn man die erz zeugende Linie ABC mit der Peripherie eines Kreises multippliciti, dessen Durchmesser die Disserenz zwischen den Entsernungen der Schwerpunkte der beyden Halsten von der Umpdrehungsare ist.

3ft BD der LM parallel, so ift biese Different == PQ x H.

Die runde gidde, welche durch die Umbrehung der Linie ABC um BD erzeugt wird, ift 2x. PV x \(\frac{1}{2} \) \text{H} = \(\pi \). PV × H = \(\pi \) Differenz der durch die Umbrehung der Solften AB, BC um LM erzeugten gloden ift demnach,

مري والمات

unter der Woranssesung, das BD der LM parallelisen, imm mer doppelt so groß, als die durch die Umbrehung der Linie ABCand BD erzeugte Alache.

\$ 174.

Aufg. Kine ebene gerode oder krummlinige Signe bewegt sich länge einer krummen oder doppele gekrumme ein Linie iho, daß ihre. Wene immer auf der Aichtung ihrer Bewegung perpendikulär bleibet man soll den kube schen Inhalt des erzeugten Kärpers sinden.

Auf L. Es fen AB-(Sig, 79) bie erzeugende Kigur, AC irgend eine gerade, frumme oder doppelt geframmte kinie, langs welcher die Ligur fich so bewegt, daß sie beständig auf selbiger, oder um mich bestimmter auszudnucken, auf der Sangente an selbiger perpendisular bleibt. Durch diese Bewegung wird ein Körper ABCD erzeugt, dessen Indale gesucht wird.

- 2) Man fielle fich vor, die Ligur AB fen schon langs der krummen AC um das Stud AAs sorigerude, und definde fich jest in A'B', Last man sie noch um ein Stud A'A" weiter guden, so beschreibt fie ein Stud des Kerpers A'B'B"A", welches, wie sogleich gezeigs werden soll, einem geraden abs getürzten prismatischen, oder prismenschntichen Korper um sondher kommt, se kleiner A'A" genommen wird.
- 2) Da namlich, nach der Boraudsenung, alle Puntte der erzeugenden Figur immer einerlen Richtung haben; so muß, wenn die Figur AB in A'B' angelangt ift, die Langente A'a der krummen Linie AC, welche der Punkt A beschreibe, der Langente M'm der krummen Linie MP, welche irgend ein

^{*)} Gine beppelt gekrummte Binie (ligno à double courbure) neune ich eine folche, beren Ciemente in verschiedenen Ebenen liegen, wie etwa die Schraubenlinie.

anderer Punte M beschreiter verallet som. Dente man fich nun aus allen Punten der Peripherie der Kigur, A/B'-Lining der A'a parallel gezogen, so. schließen alle diese Linien einem prismatischen oder prismenschulichen Raum, ein; und wenn derselbe von der Stene der Figur A'B's in ab geschwitten wird, so entsehet ein gerader abgeburzter prismatischen Kört ver A'B'ba, dessen Inhalt nach 5. 162, gefunden wird, wenn wan, die Grunossiche A'B' mit der Entsernung ihren Schwerp punttes M vom Schwerpuntte m der Figur ab multipticits. Der Inhalt diese Körpere in demnach — A'B. × M'm — AB × M'm.

ci. 3) Je naber die Sidhe A"B" an A'B' näde, desto mehruchet sich der Theil des Körpers A'B'B"A" dem prismoch sichen Körper A'B'B"A" dem prismoch sichen Körper A'Biba, so daß ihr Unterschied kleiner als jede angebliche Größe, merden Lann. Bu gleicher Zeit rück auch der Phukk m immer näher an den Schmergenete M" der Flower als jede angebliche Sedse merden Lann. Ram weiß, aber schon aus angeren Beweise diese Art, daß im einem solchen Falle, wenn die Flichen A'B', A'B' ha, mendlich näheren, das Ein ment A'B'B"A" sie A'B' ha, mendlich näheren, das Ein ment A'B'B"A" sie A'B' ha, mendlich näheren, das Ein went A'B'B"A" sie A'B' ha, man dis auch den Inhale dei unendlich kleinen Elements A'B'B"A" durch AB X N' M" andräcken.

man einen abnichen Ausbruck. Da nun in allen biefen Lustenan einen abnichen Ausbruck. Da nun in allen biefen Lustenüden ber eine Baktor AB. unverdndert bleibt, der andere Bektor aber ein Biement ber krummen Liniq MP ift; fo. findet man den Inhalt des Körpers ABDC, wenn mus die Flache AB mit der Cumme aller diefer Comente d. h. mit der Linie MP multipliciet.

5) Bet Jugalt bes Korpers ABDC, wird alfo burd bas irobutt ber erzeugenden Flace in ben Beg ihres Schwers unittes ausgebrudt.

\$ 175.

"Aufg. Die krumme Slache eines Adepers wie der im origen f zu finden.

- Auft. Die Flace eines folden Körpers wird durch die finie beschrieben, welche die Figur AB (Fig. 79) begrängte er Schwerpunkt dieser Linte sen in M, ihre Lange ... L. Es et ferner MP der Weg, welchen der Punkt M ben der Bespegung der Figur beschreibt.
- 1) Man. dente fich wieder den Körper in lauter unendlich loine Schichen, wie A'B'B'A" abgetheilt. Die Flace eines dichen Clements ist, wie aus dem vorigen Ferhellet, der Flate des unendlich kleinen abgekärzten Prismas A'B'da gleich.

 2) Es sen num m. der Schwerpunkt der Linie, welcht dem 3) Es sen dem der Schwerpunkt der Linie, welcht dem Schnitt ab begränzt; so ist nach 5 183 die Flace des Prisch nas A'B'da zu L'X M'M' zu L X M'M'. Die Summe siller dieser unendtich kleinen Flacen ist der Flace des ganzen körpers, und die Summe aller Clemente M'M' der ganzen inse MP gleich. Man erhalt also für die Flace des Korners ABDC den Ausdruf L X MEP.
- 3) Die Flidde eines folden Körpers wird also durch das produkt der ergeitzenden Linie in den Weg ihres, Schwerdunds es ausgedrudt.

§ 176. ···

Mus \$ 174 und \$ 175 ergiebt fich ber folgende, wegen biner Allgemeinheit febr mertwurdige Sag:

Wenn iegend eine gerade ober krummlinige Sigur, fich lange einer geraden, krummen, oder boppete ger

Stanniten Likis fo bewegt, baf fie finnier auf ber Richtung ihrer Beweging perpenbitular bleibet fo giebt bas Produkt der erzeugenden gigur in den Weg ibres Schwerpunttes, den Inhalt, und des Produtt . Der erzeugenden Linie in ben Weg ibres Schwerpunftes die flache des befdriebenen Borpers.

Bulbins Cat ift nur ein einzelner Fall von biefem meit allgemeineren; benn wenn eine Figur fic um eine Are brebet, fo bleibt diefelbe immer auf ber Richtung ihrer Bemer gung perpendituldr.

\$ 177.

12.2fr mind Anifg. Eine abene gerad ober Frummlinige Signa hewegt fich lange einer gepaden, trummen, oder doppele gefrummten Linte for baf fie beständig gegen die Richs gung ihrer Bewegung unter bemfelben gegebenen Winkel = 4 geneigt ift; man foll den Juhalt und die Glache den Dadurch erzeugten Borpers finden.

1 Muft. Bur ben gegenwärtigen gall muß man bas Clei ment A'B'B"A" (Fig. 79) nicht, wie in § 162 und § 163 ger foeben ift, als ein gerades, fondern als ein fchiefes, abge Burates Brifma anfeben, beffen Inhalt ober Rlace nach § 164 bem Produtte feines fenfrechten Schnittes, oder beffen Beripher vie in ben Beg bes Schwerpunttes ber erzeugenben Aldche ober Linie gleich ift. Die Rlache ober die Beripherie bes fente reden Sonittes ift aber nichts anders als bie Brojeftion ber erjengenben glache für ben Bintel 900 - m; alfo ift ber fin balt ober bie Blace bes Clements A'B'B'A" bem Brobufte Der Projettion ber erzeugenden flache ober ihrer, Beripherie in ben unenblich tleinen Weg bee Schwerpunttes ber ergen, aenden Elade eber Linie gleich. Deuft man fich nun ben

gangen Rorper aus lauter folden-Elementen gufammen gefest, fo erhalt man den folgenden Cap :

Der Juhalt, und die Slache eines Körpers, der durch die Bewegung einer, gegen die jedesmalige Richtung unter gemielben gegebenen Winkel geneigte Slache erzeuge wird, ist iminer dem Pradakte ans der Projektion der erzeugenden Slache oder Linue, für die Ergans zung des gegebenen Winkels zu 90°, in den Weg des Schwerpunktes der erzeugenden Slache oder Linie gleich. Zu f. Läst man irgend einen prismatischen Körper BCDA'B'C'D4 Kig. 71) sich so bewegen, das seine Seitens

ABCDA'B'C'De Fig. 71) fich so bewegen, daß seine Seitenk linien immer der sedesmaligen Richtung der Bewegung parale bei bleiben, so durchläuft der Schwerpunkt des schiesen Schnitte was ABCD, oder zer seiner Peripherie, einen Weg, der bem gleich ift, welchen der Schwerpunkt des senkrechten Schnittik abod, oder der seiner Veripherie barchläuft. Da nun auch der Schwitt abod die Prosettion den Schnittes ABCD ift, so beschreiben nach dem odigen Sage, diese Schwitte zwen Korv von gleichem Indalte und gleicher Kidche. Hieraus solgt aber ferner, daß alle Schnitte eines Prisma den der vorzum gesetzen Bewegung Korver von gleichem Inhalte und gleicher Kidche erzeugen.

S. 178

Es sen AQP (Big. 80) irgend eine Ebene, AB eine unbez granzte, gegen diese Soene unter einem beliedigen Winkel ges neigte, oder auf ihr senkrechte gerade Linie; es sen seiner CDP irgend eine krumme Linie, und die Goene, worfin sie tiegt, der Linie AB parallel. Man stelle sich vor, eine gerade Linie AB bewege sich lange der geraden AB, und der krummen Linie CDP sa, daß sie mabrend dieser Bewogung beständig der Sees us AQP parallel bleibe, die sie in BC-ankonnet; se hosserich

hiefe Linie eine Artetrummer Glichen, welche man in ber Stereoegmie tonaibifche Flacen nennt.

Man lege durch AB und BC die Sbene ABCQ; fie schneis de die Sbene AQP in AQ, und die Sbene der krummen Linie in CQ. Man erhält durch diese Construktion einen Körper, welcher von dem Parallelogramme ABCQ, der gemischtlinigen Sigur CDPQ, dem Drevecke AQP, und der kondidischen Sidue eingeschlossen wird. Ein solder Körper wird eine Lonoid genanut, die Fläche GDPQ seine Grundstäche, und die Linie AB seine Are, die Entsernung der Axe von der Grundsiche seine Höhe. Stehet die Axe auf der Sbene APQ senkrecht, so heist der Körper ein gerades, in allen anderen Fällen, ein schesses Konoid. Die Linie CDP, bisweilen auch AB, wird die Richtsinie genannt.

If in einem geraden Konvid die Grundsiche ein Quabrant, fo hat man ben Cono-Cuneus des Ballis. (M. f. Elügels Borterbuch, I. Th. S. 5464 Art. Cono-Cuneus.)

\$ 179

Aufg. Die Grundfläche und die Sobe eines Konoids ift gegeben; man foll ben Inhalt eines jeden der Grunde fläche parallelen Schnittes finden.

unfi. cdpq (Kig &a) fen ein folder Schnitts fein Inc. batt wird gefucht.

1) Jedet ber Sbene AQP parallele Schnitt des Körpers giebt ein geradliniges Orened. Es senen olso DEF, GUK, swen solche, der Stene AQP parallele, unendlich nahe Orene ede; sie schweiden die Grundsiche CDPQ und den Schnitt achq, in den parallelen Linion DE, GH, da, gh. Die uns endlich kleinen Trapeze DEGH, dogh, wolche hierdurch entskehen, können als Parallelogramme angesehen werden; so ber trachtet, haben sie gleiche Hobe, und verhalten sich deumach

wie ihre Erundlinien DE, do. Es ift'iber DE : do = EF : eF = BC : Bc ; also ift auch DEGM : dogh = BC : ba,

- 2) Denkt man fich nun ben gangen Korper in lauter fols che, ber Sbene AQP parallele Schichten, wie DEFGHK ges theilt, so giebt seb bieser Schichten zwen Trapeze wie DEGH, degh, welche fich wie die Linien BC: Bo verhaltens es wers batt fich also auch die Summe aller Brapeze DEGH, que Summe aller Trapeze degh, wie BC zu Bc. Die erstere Summe giebt aber die Ildce CDPQ, und die letztere die Fliche edpq; es verhalten fich demnach auch diese Flacen wie BC zu Bc.
- 3) Man laffe nun aus irgend einem Puntte der Are AB auf die Grundfläche ein Perpendikel fallen, so wird dasselbe durch die Seine odpq in dem nämlichen Berhältnisse wie BC geschnitten, weil man sich immer durch die Linie AB eine Ses ne gelegt benken kann, welche den Senen CDPQ, odpq, pas rallel ift, und nach Sem. XI. 17 zwer Linien von drep parale lelen Sbenen immer in gleichem Berhältnisse geschnitten were den. Es verhält sich demnach auch die Grundsläche zu dem ihr parallelen Schnitte des Konoids, wie die Hohe desselben zum Abstande des Schnittes von der Are.
- 4) Ift daher die Grundflache des Konoids, und det Abftand des Schnittes von der Are gegeben, fo laft fic auch der In. balt des Schnittes finden.

Anmert. Man tonnte auch ben Inhalt eines fchiefen Schnittet finden (b. h. eines folden, beffen Gene bie Stene ber Grundfidche ichneidet); die Untersuchung diefer Schnitte erfordert aber einige Kenntnis der bobern Geometrie und muß baber bier übergangen werden.

§ 180.

Aufg. Den kubischen Inhalt eines Zonoids zu finden.

Mufl. & fen (Fig. 81) ABCQP ein Ronoid RAKLMN ein brenfeitiges: Brifma auf einer feiner Geitenflachen als Grandflache geftellt; es wird angenommen, bag bepbe Rorpen auf einer und berfelben Sbene fteben, aleich große Grundflas den CPQ, KLMN und gleiche Sobe haben. Man bente fich nun diefe benben Sorper burch irgend eine Barallelebene ger fcnitten. Der Schuitt bes Drifma wird alebann ein Barale telogramm klun, welches mit ber Brunbfliche gleiche Wintel und eine gleiche Seite kl = KL bat; es ift folglich KLMN : klmn = KN : kn = RK : Rk. Deuft man fich ferner burch: AB und RS eine Barallelebene gelegt, fo werben Die Linien RK, BC, in gleichen Berhaltniffen geschnitten; folge lich ift KLMN : kimn = BC : Bc. Der Schnitt des Sonoids fen cpq; fo ift nach bem vorigen S, CPQ : cpq = Mus Diefen benden Proportionen erhalt man CPO : cpq = KLMN : klmn; es ift aber nach ber Boraus, fenung CPQ = KLMN, folglich ift auch cpq = klmn. Die Barallelichnitte ber benben Rorper find baber immer gleich, folglich and bie Rorper felbft. Der Inhalt Des Prifma, wels des bier als ein halbes Barallelepiped angefeben werben muß. in aber dem Produtte feiner Grundfidde in feine balbe Doba gleich, folglich gilt bas auch von bem Ronoib-

Der Inhalt eines jeden Lonvids ift demnach immer dem Produtte feiner Grunbfliche in feine halbe Sobie gleich.

.\$ 181.

Wenn die Aichtlinie GP (Fig. 81) eine gerade Linie ich, wie Fig. 82 zeigt, so beschreibt die erzengende Linie AP eine eigene Art koneidischer Flachen, schiefe Flachen (furfaces gunches) genannt, welche von vier geraden Linien AB, BC, GP, AP, begränzt werden, werhalb fie auch schiefe Bterseite (quadrilateres gauches) genannt werben. Das Koneich

wird alebann ein Korper, welcher von bem Parallelegramme ABCD den benden Oreneden ADP, CDP, und bem fchiefen Bierede ABCP begrangt wird. Der Inhalt diefes Rorpers wird also nach dem vorigen § gefunden, wenn man seine Grundfidche CDP mit seiner halben Hohe multiplicirt.

Da die Linie AB der Sbent CDP parallel ift, so kann man auch dichfe Linie als die erzeugende Linie, und BC, AP, als die benden Richtlinien ansehen. Alsdann ift aber ADP die Grundsiche des Konoids, und die Entsernung der Linie BC won der Sbene ADP seine Habe. Es soll nun gezeigt werden, daß dieses neue Konoid von dem vorigen nicht verschieden sep.

\$ 180.

Dulfsfas.

In einem ichiefen Vierecke entsteber immer dieselbe, Bidde, welche von feinen Geiten man auch ale bie ers zeugende Linie ansehen mag.

Bem. 12) Bas für ein schiefes Viered auch ABCD (Fig. 83) seyn mag, so läßt sich boch immer durch AD eine Senie ADP der Seite BC parallel legen, und eben so durch CD eine Senne CDP der AB parallel. Man nehme nun querft AD oder BC für die erzeugende Linie, und setze, daß eine oder die andere dieset Linien sich längs der Seiten AB, DC, fortbewegt, und daben immer der Seine APD parallel bleibt, die sie auf die andere fällt.

2) Es sen R ein Punkt ber dadurch beschriebenen Stocke, BF die erzeugende Linie für diesen Punkt; ABCP eine Ebene durch AB, BC; AFEa eine andere Ebene durch AF, FE; die erftere schnelde die Ebenen ADP, CDP, in AP, CP, und die lettere in Ae, Eo. Man erhalt hierdurch die Parallelograms me ABCP, AFEa.

3) Man' tege burch ben Punte R eine Seene Lik bee Seene DPC paraflet, fie schneide die Parafletogramme in Kk, Rr, und die Seene ADP in Lik. Se foll nun zuerft. bewiefen werden, daß alsdamn die Punte L, R, K in einer geraden Linie liegen werden.

.

- 4) Da die parallelen Ebenen DPC, LkK, durch die Schene ADP geschnicken werden, so find die Schnitte Lk, DP, parallelel. Mass hat daher AD; AL = DP: Lk, und AD; AL = Do: Lx; also and DP: Lk = Do: Lx, oder DP: Do = Lk; Lx. Die Linien CP, Ko, sind obensalle parallel; man hat also auch DP: Do = CP: Eo, oder, da CP = Kk, Eo = Ri, DP: Do = Kk; Rx. Durch sie Berbindung dies ser Proportion mit der vorigen erhölte man, Kk; Rx = Lk; Lx; da nun die Linien Kk, Rx, zugleich parallel sind, so liegen die Punkte L, R, K, sn: einer geraden Linie.
- 5) Man ftelle fich nun vor, eine von den Linien AB, CD, rucke fo lange nach den Richtlinsen AD, BC, fort, bis fie auf die andere fällt: so wird die erzeugende Linie nuch einmal in Ik zu liegen kommen; und folglich ift R unch ein Punkt der hierdurch erzeugten schlesen Fläche. Die bevoen hier betracht seten Alden haben demnach ben Punkt R gemeinschaftlich; und da dies für jeden threr Punkte gut, so find fte identisch-

Erft. gu f. Es braucht daber, wenn unn einem ichiefen Bierede die Robe ift, nie die erzengende Linie angegeben gu werden, weil es gleichgultig ift, welche von ben Geiten man dafür unnimmt.

3 ment. Buf. Da die Linien BC, EF, der Ebene APD parallel find, so kann man durch eine jude dieser Linien eine ber Stene APD parallele Ebene legen. Die Linien AB, DC, werden alsbann burch brop parallele Stenen geschnitten, und es ift also DE; EC =AF; RB, Die ernengende Linie schnete

ber babde innide thre Senden Richtlinien in gleichen Bieballe niffen. Dan tonnte alfo ein fchiefes Biereck unch wie folgt befiniren: es fen eine Flace, welche entflehet, wenn fich eine Linie idngs zwener anderen fo bewegt, bag fie diese immer in gleichen Berhaltniffen schneibet.

Da fich ferner eben fo erweifen lagt, dus auch die Linien BC, AD, durch die gerade Linie KRL in gleichen Berhald niffen geschnitten werden, so laßt fich schließen, daß ber Burche schnittspunkt zweier Linien, beren febe zwei gegenüber liegem de Seiten des Wierers in gleichen Berhaltniffen schneibet, ims mer ein Punkt der schiefen Flache ist.

. 5 185.

Aufg. Den Inhalt eines, einer abgekürzten Byras mide ahnüchen Körpers, wie ABCFED (Fig. 84) zu fine den, welchen von zwey paraftelen dreveckigen Geundfickt chen ABC, DEF, zwey schiesen Vierecken ABED, BCFE, und einem Parafteltrapez ACFD begränzte wird; jedoch nur unter der Voraussenung, daß die dem Parafteltrapez gegenüber liegende Seitenlinie EB, der Släche desselberf paraftel sey.

Muft. 2) Man tiebe aus D und f die Linien DG, FH, ber EB parallel; fie werden in die Seene ADFC fallen', weil, ber Boraussesung gemds, die Linie CB dieser Seene parallel ift; man tiebe ferner BG, BH. Hierdurch wird der Körpen in dan Prifma GBHFED, und die bepden Kongiden AGBED, BHCFE, von der in § 181 erwähnten Art sarlegt.

a) Betrachtet man nun querk ABC als die Grundsiche des Körpers, und AGB, BHC, GBH als die Grundsichen der Konoiden und des Prismus; so ift, nach § 1817 wenn die Höste des Kerpers = h gesegt wird, das Konsid DEBGA ==

△AGB'×½h, das Konoid EFCHB = △BHC ×½h; fers ner das Prisma = △GBH × h; fotglich der Inhalt des gangen Körpers = ½h(△ABG + △BHC + 2 △GBH), oder, da △AGB+△BHC+△GBH=△ABC, und △GBH-△DEF, der gesuchte Inhalt des Körpers

$$= \frac{n_1}{2} h (\triangle ABC + \triangle DEF);$$

- d. h. der Inhalt ift dem Produkte der Summe der benden Grundflichen in die halbe Sohe gleich.
- 3) Denkt man sich aber den Körper auf dem Krapez ACFD als Grundsiche gestellt, und bezeichnet man die jesige Höhe des Körpers oder die Entsernung der Kante EB von der Grundsiche durch hi; so hat man das Konoid DEBGA AGD x 1 hi, das Konoid EFCHB AFHC x 1 hi, und das Prisma Prigr. DGHF x 1 hi; solglich den Inshalt des ganzen Körpers

D. h. ber Inhalt bes Roepers ift bem Probutte ber Grundfide de in Die batbe Sobe gloteb.

\$ 184.

Aufg. Den Inhalt eines Rorpers an finden, welcher von zwey parallelen Drevecken, einem Parallelogramme, und zwey schiefen Slachen eingeschlossen wird.

Aufl. Es fen ABCDEF (Sig. 85) ein folder Rorper, ABC, DEF, fenen feine benden parallelen Grundflachen, ADEB bas Barallelogramm, ADFC, BEFC, feine benden ichiefen flachen.

Man ziehe die Linie FG den Linten DA, EB, parallel, und aus dem Puntle G, wo fie die Grundfläche triffe, die Liv nien GA, GB, GC. Hierdurch wird der Körper in Die bege Geometrie II.

den Konoiden DFAGC, EFBGC, und in des Prisma ABGDEF gerlegt. Bezeichnet also h die Hobe des Körpers, so ist der Inhalt desselchen = in (AAGC + ABGC + 2AGB) = in (ABC + ADEF).

Der Inhalt dieses Korpers wird daber ebenfalls, wie der des Rorpers im vorigen S, durch das Produkt seiner begben Grundflächen in die halbe Hohe ausgedruckt.

¶ 185.

Aufg. Den Inhalt eines achtedigen, von zwey par rallelen ebenen und vier schiefen Viereden begränzten Körpers zu finden, jedoch nur unter der Bedingung, daß zwey gegenüber liegende Seitenlinien besselben einander parallel seyen.

Aufl. Einen solden Korper zeigt Fig. 86; ABCD, EFGH, find zwen parallele ebene Bierede, welche man als seine Grundsichen ansehen kann; AEFB, BFGC, CGHD, DHEA, find vier schiefe Bierede; HD, FB, zwen parallele Seitenlinien.

Berden die Diagonasen BD, FH, gezogen, so entstehet das Parallelogramm BFHD; es theilt den Körper in zwey andere ABDEFH, BCDFGH, von der im vorigen S betrachteten Art. Der Inhalt eines seden derselben ist dem Produkte seiner benden Grundslächen in die halbe Höhe gleich; solglich ist auch der Inhalt des ganzen Körpers dem Produkte seiner benden Grundslächen in die halbe Höhe gleich.

§ 186.

Aufg. Den Inhalt eines jeden, einer abgekützten Dyrramide abnlichen Borpers zu finden, deffen Seitenlinien abe wechselnd parallel find, und ber von zwey parallelen eber nen Grundflachen von einer geraden Angahl der Seiten, und lauter schiefen Seitenflachen begrangt wird.

Aufl. ABCDEFGHIKLM (Fig. 87) sen ein folder Körper, welcher hier sechsseitig angenommen worden; ABCDEF, GHIKLM, seven seine benden parallelen Grundstächen; GA, IC, LE, seine parallelen Geitenlinien; AGHB, BHIC u. f. w. beliebige schiefe Bierede. Der Inhalt dieses Körpers soll wir K gesest werden; ferner die eine Grundstäche ABCDEF = G, die audere GHIKLM = G', und die hohe des Körpers = h.

Man setze auf GHIKLM das Prisma GHIKLMAbCalk, Deffen Inhalt atso = G'h, und ziehe die Kinien Bb, Dd, Ff. hierdurch entstehen um die Seitensiden des Prismas die Konoiden GHABb, HIBCb, IKCDd, KLEDd, LMEFf, MGFAl, deren Inhalt gefunden wird, wenn man ihre Grunds stächen AbB, BbC, CdD, 2c. mit ih multiplicirt. Da nun der gesuchte Körper aus dem Prisma und der algebraischen Summe dieser Konoiden zusammen gesetzt ist fo hat man

$$K = \frac{1}{4}h \begin{bmatrix} aG' + \triangle AbB + \triangle BbC + \triangle CdD \\ + \triangle EdD - \triangle Eff - \triangle Aff \end{bmatrix},$$

Es ift aber,

$$G' + \triangle AbB + \triangle BbC + \triangle CdD + \triangle EdD - \triangle Edf - \triangle Aff$$

= G ;

man hat also,

$$K = (G + G') ih.$$

Es last fich leicht begreifen, bag bie hier gemachten Schläffe, auf jeden anderen als sechsseitigen Korper der anges gebenen Art angewandt, bas nämliche Resultat geben muffen. Der Inhalt eines solchen Korpers ift demnach immer dem Produtte aus der Summe seiner benden Grundflachen in die halbe Sobe gleich.

Buf. Der gefundene Ausbruck gile que alsbann noch,

wenn die Jahl der Seiten in jeder Grundsidde ungerade ist; nur wird in diesem Falle der Körper nicht mehr von lauter schiefen Seitenstächen begränzt, sondern von schiefen und einer parallelogrammtichen Seitenstäche. Es verstehet Ach übrigens von selbst, daß, wenn zwey korrespondirende Seiten der Grundsidchen, wie einen AB, GH, in einer Senet liegen, das schiefe Biereck ABHG sich in ein Paralleltrapez verwandelt, und wenn noch überdies die Pankte G, H, zusammen fallen, in ein Oreneck; in dem letzteren Falle hat aber die obere Grundsiäche eine Seite weniger. Für alle diese Körper und noch ungählig viele andere, welche ane der Beränderung der relativen Lage der Punkte B, D, F, 1c. U, K, M, 1c., her, vorgebracht werden können, gut der obige Ausdruck für den Inhalt.

\$ 187.

Aufg. Den Inhalt eines Leiffornigen Rorpers 32 finden, welcher von zwey Dreveden, einem Parallelogramme, einem Trapeze und einem schiefen Vierecke begrangt wird.

Aufl. ABCDEF (Kig. 88) fen ein solcher Korper; er wird von dem schiefen Bierede AEFD, von dem Parastetor gramme BEFC, von den benden Drepeden ABE, DCF nund von dem Krapeze ABCD, welches dier ols Grundsidde anger nommen wird, begranzt. Der Inhalt dieses Krapezes sew = G, seine Seite AB = a, seine Seite DC = b, und der Reigungswinkel dieser Linien, oder der Winkel APD = a; ferner die Höhe des Körpers = h, und sein Inhalt = K. Ses soll nun K aus G, a, b, a, bestimmt werden.

Man mache das Parallelogramm ABCL, und ziehe DL, FL. Hierdurch wird der Körper in das Prisma ABCLFE, in das Konoid ALDFE, und in die Pyramide FLCD zerlegt. Man hat also

 $K = (\text{Prigr. ABCL} + \triangle \text{ALD}) \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{h} + \triangle \text{CLD} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{h} = (\text{Prigr. ABCL} + \triangle \text{ALD} + \triangle \text{CLD}) \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{h} - \triangle \text{CLD} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{h}$ Es if aber Prigr. $\text{ABCL} + \triangle \text{ALD} + \triangle \text{CLD} = G$; man hat also $K = (G - \frac{1}{2}\triangle \text{CLD}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbf{h}$.

Da CL = AB = a, $CD = b_L \angle LCD = \angle APD$ = α ; fo if $\triangle CLD = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$; folglid,

K = (G - jab Sin, a) ih.

- Anmer ?. Da diese Resultat in den benden folgenden gen in seiner gauzen Allgemeinheit gehraucht wird, so halte ich es für nothig, die einzelnen Falle, welche die Auflösung in fich schließt, hier besonders zu untersuchen.
 - 1) Der Punkt D (Fig. 89) falle, innerhalb des Parallelos gramms ABCL, und unterhalb der Linie BC. Für diefen Kall ift
- K = Prisma ABCLEF Conoid ADLEF Phyramide FDCL = (Prigr. ABCL ADL) ih CDL.ih = (Prigr. ABCL ADL CDL) ih + CDL.ih. Es ik aber

Prigr. ABCL — ADL — ACDL = Erap. ABCD = G; foiglich ift auch, K = (G + 4 ACDL) ih. Da num. LDCL = LAPD = a. CL = AB = a. DC = b. so ift ACDL = iab Sin. a. und daser.

 $K = (G + \frac{1}{2} sh \sin \alpha) \frac{1}{2} h$.

Diefer Ausbruck tonn aber auch unmittelbar aus bem Normalfally bergeleitet werben, wenn man — a ankatt a fest; benn ber Binkel APD in Sig. 89, ift in Beziehung auf ben namlichen Winkel in Sig. 88 negativ, wie man aus ber Lage ber torrespondirenden halbmeffer, nach ber im iften Ebeis le dieser Samml. gegebenen Anleitung, sehr leicht erkennenwird.

2) Der Punkt D habe die Lage Fig. 90; alebann ift K = Prisma ABCLEF + Ppramide FLCD - Ronoid ALDEF = (Prigr. ABCL - ALD) ih + CLD . ih = $(\mathfrak{P}rlgr. ABCL + \triangle CLD - \triangle ALD) \downarrow h - \triangle CLD \cdot h$ $=G \cdot _{1}h - \triangle CLD \cdot _{3}h \Rightarrow (G - _{3}\triangle CLD) \cdot _{3}h.$ Da nun \(CLD = \frac{1}{2}\) ab Sin. a; so ift.

 $K = (G - 1 + ab \sin, \alpha) + h$

· wie im Normalfalle.

3) Fur Fig. 91, mo die Puntte B, C, D, in einer geras ben-Linie liegen, bat man,

K = Prisma ABCLEF + Poramide FLCD - Povoid ALDEF = (Prigr. ABCL - ALD) ih + ALCD. ih = (Neigr. ABCL + \(\triangle LCD - \(\triangle ALD \) i h - \(\triangle LCD . i h \)

 $= G \cdot ih - \triangle LCD \cdot ih.$

Da nun fur biefen Fall ber Puntt P auf B fallt, fo if $LCD = ABC = \alpha$, and $\triangle LCD = 1$ ab Sin, α . Man hat also

 $K = (G - \frac{1}{2}ab \sin a) \frac{1}{2}b_{\ell}$

wie im Rormalfalle.

Dieraus ergiebt fich jugleich ber Inhalt eines Rorpers, welcher von dren Drepeden, einem Parallelogramme, und einer ichiefen Blache begrangt wird.

4) gur Fig. 92 ift

K = Prifima ABCLEF + Poramide FCLD - Lonoid ALDEF = (Wrige. ABCL - ALD) ih + ALCD. ih = (\mathfrak{P} rigr. $ABCL + \triangle LCD - \triangle ALD$) $\sharp h - \triangle LCD \cdot \sharp h$ $= G \cdot \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}ab \sin \alpha \cdot \frac{1}{6}h = (G - \frac{1}{6}ab \sin \alpha) \frac{1}{2}h,$ wie im Normalfalle.

5) Wenn man fich vorftellt, die Linie CD brebe fich noch

weiter um C, so schneibet die schieft Alde AEFD (Kig. 93) das Parallelogramm BEFC nach irgend einer krummen Linie Be, und man hat alsdann anstatt des vorigen einen Körpers deren zwen, namlich: 1) Den Körper ABeE, welcher von den benden ebenen geradlinigen Oreneden ABE, ABe, dem gemischtlinigen ebenen Orenede BEe, und dem gemischtlinigen schiefen Orenede AEe begränzt wird; 2) einen Körper EFDCe, welcher von den benden ebenen Oreneden DCo, DFC, dem ebenen und gemischtlinigen Vierede CFEe, und dem gemischtlinigen schiefen Vierede DFEo begränzt wird. Man bezeichne nun die Oifferens dieser benden Körper, namitich CDdFE—ABeE, durch Ki, und die Oifferenz ihrer benden Erundsichen, namlich DeC — AbB, durch Gi. Ales dann ist

K'= Ronoid ALDEF - Pyramide FLCD - Prifing ABCLEF

= (\(\triangle ALD - \triangle rigr. ABCL \) \(\frac{1}{2}h - \triangle LDC \) \(\frac{1}{2}h + \trian

On aber $\angle LCD = 180^{\circ} - \alpha$, so iff $\triangle LCD = \frac{1}{2}ab \sin (180^{\circ} - \alpha) = \frac{\alpha}{2}ab \sin \alpha$, and baher

$$K' = (G' + \frac{1}{2}ab \sin a) \frac{1}{2}h$$

Dieses Resultat stimmt mit bem des Normatsaltes völlig überein, wenn man nur K' anftatt K, G' anstatt G, und α , der gegenwartigen Lage des Wintels APC gemäß, negativ nimmt.

6) Liegen die Puntte L, C, D, in einer geraden Linie (Kig. 94), fo hat man:

K'-= Ronoid ALDEF - Prisma ABCLEF = $(\triangle ALD - Prigr. ABCL) \cdot h$ = $(\triangle DeC - \triangle AeB) \cdot h = G^* \cdot h$.

Diefes Refultat erhalt man auch aus dem für den Normalifall, wenn man K' anfatt K, G' anfatt G, und a = o fest.

7) Får Fig. 95 ift

K'= Ronoid ALDEF + Phyramide FLCD - Prisma ABCLEF = (\(\triangle ALD - \Prism rigr. ABCL \) \(\frac{1}{2} \tau + \triangle LDC \) \(\frac{1}{4} \tau \)

 $= (\triangle ALD + \triangle LDC - \text{prigr. ABCL}) \text{ in } - \triangle LDC \cdot \text{ in }$ $= (\triangle D \cdot \text{qC} - \triangle A \cdot \text{B}) \text{ in } - \triangle LDC \cdot \text{ in }$ $= G \cdot \text{ in } - \triangle LDC \cdot \text{ in }$

Da aber \angle LDC = 180° - α ; so ift \triangle LDC = $\frac{1}{2}$ ah Sin. (180° - α) = $\frac{1}{4}$ ah Sin. α_{d} und folglich

K' = (G' - Jab Sin, a) 1 h, ...

Bus. Bezeichnet also im Allgemeinen K ben Inhalt eis nes Körpers, wie ABCDEF (Fig. 88, 89, 90, 91, 92), oder die Differenz zwen solcher Körper, wie DCeEF, ABeB, (Fig. 93, 94, 95); ferner G die Grundsiche ABCD, oder die Differenz der benden Grundsichen CeD — AeB; so ift immer K = (G — zab Sin, a) zh, wenn man nur den Wintel a, seiner jedesmaligen Lage gemäß, positiv oder negativ nimmt.

S 188.

Aufg. Den Inhalt eines Körpers zu finden, welcher von zwey parallelen Dreveden und drey schiefen Viereden eingeschlossen wird.

An fl. 1) Es fen ABCA'B'C' (Fig. 96) ein folder Ror, per; er wird von den zwen parallelen geradlinigen Dreneden ABC, A'B'C', welche als feine Grundflachen angefeben wer-

ben können, und von den dren schiefen Biereden AA'B'B, BB'C'C, CC'A'A, begranzt. Es sen der Inhalt der Grund; fläche A'B'C' = G'; die Hohe des Körpers sen = h.

- 2) Man giebe von ben Duntten A', B', C', auf die Brund. fidde ABC die Perpenditel A'a, B'b, Cic, vollende das Drife ma A'B'C'abc und siehe die Linien Aa, Bb, 'Cc. Durch Dies Se Conftruftion entfleben bren Korper von ber im vorigen f betracteten Art; namito; 1) Ein Rorper AabBA'B', ber von bem Parallelogramme A'Bba, von den benden Oreneden AaA', BbB', dem Erapege AabB, und dem fcbiefen Bierede AA/B/B begrangt wird; er werde, ber Rurge wegen, burch K' bezeichnet, und feine Grundfliche burch g'i 2) ein Rorper BbcCB'C', der von dem Parallelogramme BCcb, von den benden Dreneden B'bB, C'cC, von dem Trapes BbcC, und von dem ichiefen Bierece BB'C'C, begrangt wird; er beife K" und feine Grundfliche g"; 3) ein Rorver AacCA'C', der von bem Parallelogramm A'C'ca, von ben benden Drepeden A'aA. C'cC, von dem Erapes AacC, und von bem ichiefen Bierede AA'C'C begrangt wird; er beife K'" und feine Grundflache g". Der gefucte Rorper felbft werbe burd K bezeichnet, und bas Drifma A'B'C'abo burch P.
- 3) Ich will nun annehmen, die Linien Aa, Bb, Cc, wie auch die Reigungswinkel jeder zwen dieser Linian wären gezgeben, und es sen Aa = a, Bb = b, Cc = c, der Reiz
 gungswinkel von Aa und Bb = α , der von Bb und Cc = β , der von Cc und Aa = γ . Nan hat alsbann nach dem vortigen δ ,

K' = $\frac{1}{4}g'h$ $\rightarrow \frac{1}{12}abh$ Sin, α_s K'' = $\frac{1}{4}g''h$ $\rightarrow \frac{1}{12}bch$ Sin, β_s K''' $= \frac{1}{4}g''h$ $\rightarrow \frac{1}{12}ach$ Sin, γ_s P = G'h. Do non K = K' + K'' + K''' + P; fo iff $K = (2G' + g' + g'' + g''') \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}h$, (abSin, $\alpha + b$ cSin, $\beta + a$ cSin, γ)

4) Die drei Trapeze AabB, BbcC, AacC, und das Orens ed abc, geben zusammen genommen das Orened ABC; man hat also G' + g' + g'' + g''' = G, und folglich,

 $K = \frac{1}{2}h(G + G') - \frac{1}{2}h(ab \sin \alpha + bc \sin \beta + ac \sin \gamma)$

Anmert. Obgleich die Auflöfung nur für den Fall eim gerichtet worden, wo das Orened abo gang innerhalb des Orenedes ABC fällt, so erstreckt fich der für K gefundene Ausbrud doch auf alle Körper von der angegebenen Art, die res lative Lage der Orenede ABC, abc, sep weiche sie wolle, wenn man nur sedesmal die Wintel a, b, y, dieser Lage ges maß, positiv ober negativ nimmt. Diese Behauptung läst sich awar schan aus der Allgemeinheit der algebraischen Formeln in hinsicht auf verwandte Fälle rechtsertigen; um indessen hierüber keinen Zweisel übrig zu lassen, will ich noch zwed Fälle in Betrachtung ziehen, auf welche und dem Normals falle sich alle übrige Fälle zurücksten lassen.

1) Für Fig. 97 hat man K = K' + K'' - K''' + P. Werben hierin für K', K'', K''' und P ihre Werthe aus 3 der Aufl. substituirt, so erhalt man,

X=(2G'+'g'+g''-g''')ih-1'zh(abSin.α+besin β-aeSin.y). Es ift aber für den gegenwärtigen Fall G'+g'+g''-g'''=G; man hat also,

 $K = \frac{1}{2} h (G + G') - \frac{1}{2^n} h (ab Sin. a + bc Sin. \beta - ac Sin. y).$ Diefer Ausbrud weicht von dem vorigen nur in dem Vorzets den von ac Sin. y ab. Aus der Vergleichung der Fig. 97 mit Fig. 96 ergiebt fich aber fogleich, daß der Wintel y jest

eine entgegengesette Tage erhalten hat, woraus nun ferner einseuchtend ift, warum der Cheil ac Sin. y sein Borzeichen andern mußte.

2) In Fig. 98 schneibet das Parallewgramm A'acc' das schiefe Bierec', und man erhalt, anstatt des einen Korpers AacCA'C', zwen Korper von der im vorigen § (Anmer f. 5) betrachteten Art, namlich C'Ccm und A'C'Aam. Man bezeichs ne den ersten durch Kir und seine Grundstäche Com durch gir, serner den zwenten durch Kr und seine Grundstäche Aam durch gr. Alsbann ist K = K' + K'' + P + Kir - Kr. Nach dem a. D. ist aber Kir — Kr = $(g^{1r} - g^r)$ h $-\frac{1}{2^n}$ ach Sin. 93 man erhalt also,

K =

(2G/+ g'+g''+g''-g'') $\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}h$ (abSin. α + bcSin. β + acSin. γ), Da aber $G' + g' + g'' + g^{IF} - g^{F} = G$; so if, $K = \frac{1}{2}h$ (G + G') $-\frac{1}{2}h$ (abSin. α + bcSin. β ; + acSin. γ), where Mormelsalle.

\$ 189.

Aufg. Den Inhalt eines Zörpers zu finden, wels der von zwes parallelen ebenen Vielecken von gleich vies len Seiten, und eben so vielen schiefen Vierecken, als jeden Vieleck Seiten hat, begranzt wird.

Auft. 2) Es sen ABCDEA'B'C'D'E' (Fig. 99) ein folscher Körper, ABCDE seine eine Grundfidde = G, A'B'C'D'E' seine andere Grundfidde = G'; ferner AA'B'B, BB'C'C, CG'D'D, n., lauter schiefe Bierecke. Man lasse von A', B', C', 2c., die Perpendisel A'a, B'b, C'c, 2c., auf die untere Grundfidde herab, und vossende das Prisma ABCDEabcdog welches durch P bezeichnet werden foll; ziehe auch die Liniem Aa, Bb, Cc, n. Es sen Aa = a, Bb = b, Cc = e, xe,

der Reigungaminkel von Aa und Bb = α_i der von Bb und Cc = β_i der von Cc und Dd = γ_i ic. Kings um das Prifs ma besinden sich sauter Körper von der in § 187 betrachteten Art, AabBRA', BhcGCB', CcdDD',C', ic., die in eben der Ordnung durch K', K'', K''', ic., so wie ihre Crundslächen durch g', g'', g''', ic. bezeichnet werden sollen. Der Körper selbst heiße K.

2) Rad § 187 hat man $K^{\ell} = \frac{1}{2}g'h - \frac{1}{2}abh$ Sin, α_{ℓ} , $K'' = \frac{1}{2}g''h - \frac{1}{2}abh$ Sin, β_{ℓ} , $K''' = \frac{1}{2}g'''h - \frac{1}{2}acdh$ Sin, α_{ℓ} , i.e.; and ift P = G'h. Da nun $K = P + K' + K'' + K''' + \frac{1}{2}c$, und G' + g' + g'' + g''' + ic. = G, so hat man,

 $K = \frac{1}{2} h (G + G') - \frac{1}{12} h (ab Sin, a + bc Sin, \beta + cd Sin, \gamma + tc.)$

Bu f. Die Linien Aa, Bb, Co, ic. find nichts anders ale, Die Profettionen der Seitenlinien AA', BB', CC'; ic. auf die Grundfide. Man tann daber das hier gefundene Resultat auf die folgende Art in Borte übertragen:

Der Inhalt eines jeden von zwer parallelen Grundsstäden von gleich vielen Seiten und eben so vielen schiesen Dierecken, als jedes dieser Grundstächen Seiten bat, begränzten Körpers, ist dem Reste gleich, welcher erhalten wird, wenn von dem Produkte der Summe seiner beyden Grundstächen in die halbe Sobe, die Sums me der Produkte von jeden zwer unmittelbar auf eins ander solgenden Projektionen seines Seitenlinien in den Sinus ihres positiven oder negativen Reigungsswinkels und in den zwölsten Theil dieser Sobe abgezos gen wird.

§ 190.

Die Aufgabe in § 186 ift nur ein einzelner Fall von der weit allgemeinern des vorigen Sis; es muß fic alfo auch der

daseibst für K gefundene Ausdruck in (G + G') aus dem, im vorigen & für K gefundenen, herleiten lassen. Um dies zu zeit gen, sen ABCDEF (Fig. 100) die Grundsidche eines solchen Körpers, wie der in § 186, hier ein Sechstet; A, C, E, mögen die Hunkte sen, von welchen die gleichen parallelen Geitenkanten ausgehen; Aa, Cc, Eo, die Projektionen dieses Kanten, die also ebenfalls gleich und parallel, wie auch nach einerlen Seite gelehrt sen werden; Bb, Dd, Ff, die Projektionen der nicht parallelen Geitenkanten. Sest man nun Aa = a, Bb = b, Co = c, Dd = d, Eo = e, Ff = f, den Reigungswinkel von Aa und Bb = a, den von Bb und Co = b, v.; so ist nach dem vorigen S,

$$\mathbf{E} = \mathbf{i} \mathbf{h} (\mathbf{G} + \mathbf{G}) - \mathbf{i} \mathbf{h} \begin{bmatrix} ab \sin \alpha + bc \sin \beta + cd \sin \gamma + bc \sin \beta + cd \sin \beta \end{bmatrix}$$
de Sin, δ + ef Sin, δ + fa Sin, δ

Wegen der entgegengesetzen Lage der Wechselminkel α und β , γ und δ , ε und ζ , ist aber $\beta = -\alpha$, $\delta = -\gamma$, $\zeta = -\varepsilon$; auch ist $\alpha = 0 = 0$; man hat also,

$$K = \frac{1}{2}h(G + G') - \frac{1}{2}h\begin{bmatrix} ab \sin \alpha - ab \sin \alpha + ad \sin \gamma - \\ ad \sin \gamma + af \sin \lambda - af \sin \alpha \end{bmatrix}$$

 $K = \frac{1}{2}h(G + G')$:

pie in § 186...

Hieraus ergiebt fich aber anch zugleich, bas es, aufer dem Fall ber abwechselnd parallelen Geiten, nach unendlich wiele andere Falle giebt, wo der Inhalt eines solchen, von schiefen Wiereden, und zwen parallelen ebnen Wielesten einges schloffenen Köppers, durch bas Produkt seiner bepden Grunds sidden in die halbe Hohe ausgedruckt wird. Diese Eigenschaft kommt namlich allen deinen Köppers zu, für welche ab Sin. a + bc Sin. 6 + cd Sin. 9 + de Sin. a + 10. 70 off.

Richts kann uns übrigens hindern, anzunehmen, daß die schiefen Bierecke fich in ebene verwandeln; man erhalt alse dann einen Körper, wie der in § 255. Der im vorigen § gessundend Ausdruck gilt also auch für diesen Körper. Er giebt den Inhalt des Körpers durch die Projektionen der Seitenkans und die Reigungswinkel dieser Projektionen, ankatt daß die Ausdrück in § 255 und § 256 ihn durch die Seiten und Winkel der benden Grundslächen geben.

Wenn in einem Körper von der im vorigen f betrachteten Art, zwen Winkelpunkte der oberen ober der unteren Grundfläche in einen einzigen zusammen fallen, so verwandelt fic das schiefe Viered, zu welchem diese Punkte gehören, in ein ebenes Orened. Man kann also auch den Inhalt eines von schiefen Viereden und ebenen Oreneden begrängten Köreners finden.

Die Formel § 190 gilt alfo für alle Rorper, welche zwen parallele, abrigens betiebige Grundflachen haben, und von brenedigen, trapezischen, oder schiefen Seitenflachen begrant werben.

Daß das Prisma und die Pyramide zu dem Körper des worigen S's gehören, verstehet sich wohl von selbst. Für das Prisma find die Prosektionen der Seitenkinien alle parallel, und daher a, \beta, \chi, \conso. \conso.

 $\frac{1}{2}ab \sin \alpha + \frac{1}{2}bc \sin \beta + \frac{1}{2}cd \sin \beta + \frac{1}{2}c. = G_{\frac{1}{2}}$ folglich $K = \frac{1}{2}bG - \frac{1}{2}b \cdot aG = \frac{1}{2}bG$,
wie erforbert with

Man hatte auch ben Inhalt bes Körpers Fig. 99 durch die Zerlogung besselben in tauter dreifeitige, von schiefen Flaschen begränzte Körper, wie der in § 189 sinden können. Denkt man fich namlich die Diagonalen AC, CE, in der unsteren Brundsidche, und die ihnen korrespandirenden Diagonalien A'C', C'E', gezogen, und sowohl durch AC, A'C', alsauch durch CE, C'E', ein schiefes Viereck gelegt, so entstehen drep drepseitige, von schiefen Vierecken begränzte Körper, der ren Inhalt nach § 189 gesunden werden kann. Es sen wer Neigungswinkel der Projektionen Aa, Co, und der Neigungswinkel der Projektionen Co, Eo. Werden diese Winkel stüt en Körper ABCA'B'C', CDEC'D'E', als positiv angesen, so müssen sie in Beziehung auf den Körper ACEA/C'E' als negativ angesehen werden. Man hat also,

Bird bies alles gusammen abbirt, so erhalt man den Inhalt bes gangen Korpers, ober K. Da nun

$$\triangle ABC + \triangle ACE + \triangle CDE = G,$$

 $\triangle A'B'C' + \triangle A'C'E' + \triangle C'D'E' = G';$

so if

$$\mathbf{K} = \mathbf{i} \, \mathbf{h} (\mathbf{G} + \mathbf{G}') -$$

In (ab Sin. α + bc Sin. β + cd Sin. γ + de Sin. δ + ea Sin. ϵ), which im § 190.

Es laßt fic auch im Allgemeinen die Lichtigkeit bes ge

fundenen Refullates febr leicht einsehen, wenn man bebentt, baß jedes diagonale ichiefe Biered zwenen von den dranseitigen Körpern, in welche der ganze zerlegt worden, gemeins schaftlich ift, und daß der, diesem Bierede entsprechende Projettionswinkel für ben einen Körper als negativ angesehen werden muß, wenn er für den anderen als positivangesehen wird; folglich diejenigen Glieber in dem Ausdrucke für K, welche von den schiefen Diagonalsidden herrühren, fich wechselseitig ausheben muffen.

Welche von ben Brojettionswinteln in benr Ausbrucke für K pofftiv, und welche negativ genommen werden muffen, tann febr leicht mit Bulfe ber forrespondirenden Salbmeffer ents fcbieden werden. Da namlich im vorigen & ben ber Auflo fung bas Schema Fig. 88 gum Grunde gelegt worben, in weldem alle Projektionswinkel jedesmal nach ber Seits, wo bas Parallelogramm liegt, gelehrt find, fo darf man nur einen Preis befdreiben, Die torrespondirenden Salbmeffer der Broieftionen Aa, Bb, Ca, ic. sieben, wie auch die forrespondirenben Balbmeffer biefer Linien fur die verwander Sigur, auf welche die Kormel angewandt werben foll; aus der relativen Lage diefer letteren Salbmeffer, verglichen mit ber relativen Lage ber erfteren, wird fic alebann, nach ber im erften Theif le Diefer Sammlung binlanglich burd Benfpiele erlauterten Beife, obne weiferes Nachbenten fogleich entscheiben laffen, welche Wintel pofitiv, und welche negativ angenommen merben muffen.

Ueberhaupt scheinet mir ber Gebrauch ber torrespondirens ben halbmeffer bas untrüglichste, und ber Natur ber Sache angemessente Mittel au seyn, verwandte Figuren burch bas Medium bes Raltuls auf einander zu beziehen. Ich sage: bas ber Rutur ber Sache angemeffenfte Mittel; weil die korrespondtrenben Salbmeffer, ben dem Uebergange eis ner Rigur in eine anbere, gerade biefelben Bewegungen mas den, als die Linten det Rigur felbft, und daber die gonios metrifden Linien in ber Figur und in bem ihr angeordneten' Rreife immer einerlen Große und einerlen Lage haben. Krenlich ift biefes Mittel nur alsbann anmenbbar, wenn man fic ben der Auflojung einer geometrischen Aufgabe der Winkel be-Dient, nicht aber alebam, wenn man es bloß mit Linien an. thun bat. Aber, nicht gu gebenten, bag bie Bestimmung bes Bofitiven und Megasiven ben anderen geometrischen Großen als Mintel ibre eigenen Schwierigfeiten bat, welche ganglich an beben, ben Geometern vielleicht nie gelingen durfte -, ift Die Anwendung des goniometrifden Caltuls auf geometrifde Untersuchungen, abgesehen von dem gar nicht unbedeutenden Bortbeile, welchen fie ben iber Bergleichung verwandter Sie auren gemabret, auch icon beshalb febr zu empfehlen, meil Dadurch in den meiften Kallen die Rechnungen einfacher were ben, und eine gleichformigere Behandlung geftatten. Dies nur beplaufia; an einem anderen Orte mebr.

J 191.

Rach § 164 ift ber Inhalt eines abgetärzten prismatischen Körpers, die Grundfidche sen welche fie wolle, immer dem Produtte seines sentrechten Schnittes oder der Peripherie des felben in die Entfernung der Schwerpunkte seiner benden Grundfidchen oder ihrer Peripherien gleich.

Da diefer San allgemein ift, so gilt er auch alebann, wenn fich die beoden Grundfidden in irgend einem Punkte ober einer geraden Linie berühren. Das lettere ift der Fall ben bem Körper ABCDAB (Fig. 101), welcher von den ben, ben gemischtlinigen Figuren ACB, ADB, und von einer entim berformigen Flache begrangt wird; man pflegt ihn, wegen seis

ner Askalickeit mit einem hufe, einen hufförmigen Körper zu nennen. Ift demnach des Körpers Grundsiche ACBA selbst ein senkrechter Schnitt, S ihrer klache Schwerpunkt, und ihr, Inhalt = q, 'T der krummen Linie ACB Schwerpunkt, und ihre Lange = 1, (die Linie AB braucht ben dem legteren Schwerpunkte nicht in Betrachtung gezogen zu werden, weit sie keine Flache giebt,) und sind SS', 'TT', zwei Perpendikt auf der Grundsiche, also die Punkte S', T', wo die Ebene der oberen Grundsiche von diesen Linien getroffen wird, die Schwerpunkte ihrer Klache und Linie; so ist der Inhalt des Körpers = q. SS' und seine cylinderformige Flache = 1.TT'.

Es kommt also, wenn man den Inhalt und die Flacke eines solchen Körpers sucht, bloß darauf an, den Schwerpunkt einer krummen Linie und der von ihr begranzten Flacke zus sinden. Wie dies im Allgemeinen geschiebet, wird in der Instegralrechnung gelehrt, und gehöret also nicht hierher. In einigen besondern Fallen aber kann man ihn vermittelft der Guldiuschen Regel sinden, wie im folgenden I gezeigt wird, und dies mag vorerst genügen.

5 192. Hilfsfag.

Aufg. Den Schwerpunkt einer krummen, Linie und ber von ihr begranzen Stache vermittelft der Guldinschen Regel zu finden.

Aufl. 1). Es fen ABC (fig. 102) irgend eine frumme Linie, die Entfernung ihres Schwervunktes T von einer geraden Linie DE = y, und die Entfernung des Schwerpunktes S ihrer Fliche von diefer Linie = x. Es fen ferner der Inhalt der krummlinigen Fliche ABC = f, die Lange der krummen Linie ABC = 1, der Inhalt des Ropers, welcher entstehet,

wenn die Alde ABC fic um DE als Are drehet, = K, und feine Oberfidche = F. Der Punkt S durchläuft ben der Umsdrehung einen Beg = 2 x x, und der Punkt T einen Beg = 2 x y. Man hat also nach der Gulbinschen Regel die Glebchungen:

f.2x = K, 1.2xy = F; und hieraus erbate man,

$$x = \frac{K}{3 \times f}, y = \frac{F}{3 \times 1}.$$

Es laft fic alfo x finden, wenn K, f, und y, wenn F, 1, bes

2) Man siehe EF auf DE perpendikular, und seize die Entsernung des Schwerpunktes I won dieser Linie = x', und die des Schwerpunktes T = y'. Stellt man fich vor, die Fis gur drehe fich nunmehr um die Linie EF als Are, und sest man den Inhalt des durch die Alde ACB beschriebenen Körpers = K', und seine kramme Alde = F'; so hat man, wie in 1,

$$x' = \frac{K'}{2 \times f'}, \quad y' = \frac{F'}{2 \times 1},$$

woraus fic x' und y' bestimmen laffen, wenn K', f, und F', 1, bekannt find.

3) Rennet man die Entfernung eines Punttes von zwenen, ber Lage nach gegebenen Linien, so läßt fich der Puntt finden. Es läßt fich also aus x, x', der Puntt 8, und aus y, y', der Buntt T finden.

Bu f. Bestehet die Figur aus zwen ahnlichen und gleichen Salften wie ACOA, BCOB-(Fig. 103), so liegen die Schwer, punte S, T, nothwendig in der geraden Linie CO, welche die fe benden Salften schwert; man darf baber in diesem Falle

nur die Entfernungen diefer Puntte von der Linje AB, b. f.

Ben sp. Für ben Halbfreis ACB giebt die Umdrehung um AB eine Rugel; folglich ift, wenn der Halbmeffer = r gesett wird, $K = \frac{4}{3} \times r^3$, $F = 4 \times r^2$, $f = \frac{1}{4} \times r^2$, $1 = \times r$. Mant hat daher $x = \frac{4r}{3} = SO$, $y = \frac{2r}{x} = TO$.

\$ 193.

Aufg. Den Inhalt und die glache eines hufformigen Cylinderabschnittes zu finden.

Aufl. Es sen ABCL (Asg. 104) ein gerader Schnitt eis nes geraden Eplinders, also ein Rreis; sein Halbmesser sen = x. Es sen ferner AB ein Durchmesser diese Kreises, AC'BA irgend ein schiefer Schnitt des Eplinders, welcher hier nur zur Halfte zezeichnet ift, sein Reigungswinkel gegen die Ebene ACBA = a; AC'BA irgend ein anderer schiefer Schnitt, welcher ebenfalls nur zur Halfte zezeichnet ist, und sein Reigungswinkel gegen die Sedene ACBA = \beta. Hier durch entstehet ein Körper AC'C'BA, welcher von den bept den halben schiefen Schnitten AC'BA, AC'BA, und von der Enlindersische begränzt wird; man kann ihn einen huffarmis gen Enlinderabschnitt (ungula cylindrica) nennen, und gehöret er zu den Körpern § 191. Der Inhalt und die Fläche dieses Körpers läst sich verschnen.

1) Es sen S ber Schwerpunkt des Halbkreises ACB; also dann ift nach § 192 OS $=\frac{4 \text{ r}}{3 \text{ x}}$, und daher in dem rechtwing keligen Orenecke OSS', SS' = OS . Tang, $\alpha = \frac{4 \text{ r}}{3 \text{ x}}$ Tang. α . Mach § 191 ist aber der Inhalt des Körpers AC'CBA dem

Produkte des Halbkreises 'ABC in SSe gleich; 'es ist also die ser Inhalt $= \frac{1}{4} \times r^2 \cdot \frac{4}{3} \times T$ Tang. $\alpha = \frac{\pi}{4} r^3$ Tang. α . Eben so sindet man den Inhalt des Körpers ACC''BA! $= \frac{\pi}{4} r^3$ /Tang. β . Tolglich ist der Inhalt des ganzen Körpers

$$= \frac{2}{3} r^3$$
 (Tang. $\alpha + \text{Tang. } \beta$) $= \frac{2}{3} r^3 \frac{\sin. (\alpha + \beta)}{\cos. \alpha \cos. \beta}$

2) Es sen num T der Schwerpunkt der halben Kreisperis pherie ACB; so ift nach \$ 192 OT = $\frac{2}{\pi}$ und daher TT' = OT. Tang. $\alpha = \frac{2}{\pi}$ Tang. α . Nach \$ 191 ift aber die cylindrische Fläche des Körpers AC/CBA dem Produkte der halben Kreisperipherie in TT' gleich; es ist also die Fläche = πr . $\frac{2}{\pi}$ Tang. $\alpha = 2$ r^2 Tang. α . Eben so sindet man

die cylindrische Aldche des Körpers ACC"BA = 2 r2 Cang. B. Folglich ist die cylindrische Fläche des ganzen Körpers.

$$\alpha = 2 r^2$$
 (Tang. $\alpha + \text{Tang. } \beta$) = $2 r^2 \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

Anmert. Wit halfe diefer Formeln lagt fic der tubit, iche Inhalt und die Flace der Connen, und Kreuggewölbe fehr leicht berechnen; da indessen die Gewölbe betreffenden geometrischen Aufgaben, erft in dem folgenden Sheile ihren Plat sinden können, so werden diese Anwendungen hier wegegelassen.

XIII, Bom Maximum und Minimum, in fos fern biefet Gegenstand zur Clementar: Scometrie gehort.

(Fortfegung)

\$ 194.

Das in § 222 Eh. I. dieser Samml, gefundene Resultat läst sich auf die folgende Art umlehren;

Unter allen Dreveden von gleichem Inhalte und auf derfelben Grundlinie, hat das gleichschenkelige den Bleinsften Umfang.

Denn da das gleichscherkelige Oreved, nach dem angesihrten Orte, das größte unter allen Oreveden auf derselben Grundslinie von gleichem Umfange ift; so ift es auch größer, als ir, gend eines dieser Orevede, das Theißen mag. Soll daber das gleichschenkelige Oreved mie dem Orevede T. einerlen Inhalt erhalten, so muß seine Hohn Orevede T. einerlen Inhalt erhalten, so muß seine Hohn bei Orevede T gleich ner. Da nun vorher sein Umfang dem des Orevede T gleich war, so muß sest sein Umfang kleiner senn. Das gleichschenktelige Oreved von gleichem Inhalte und auf derselben Grundslinie mit irgend einem anderen T hat demnach einen kleineren Umfang; also auch den kleinsten unter allen diesen Oreveden.

Eben fo laft fic ber Sas \$ 117 Eb. I. umtehren, und swar wie folgt:

tuter allen Vieleden von gleichem Flacheninsalte und derselben Seitenzahl hat das reguläre Vieled den Kleinsten Umfang. Denn da nach dem angef. Sate ein reguldres Bieled größer tft, als jedes andere von gleichem Umfange und derselben Seirtenzahl; so muß ein reguldres Welede, welches einem ander ren nicht reguldren Bielede P von berselben Seitenzahl an Aldwenindalt gleich seyn soll, einen kleineren Umfang als Phaben. Da nun dies für jedes Bieled wie P gilt; so hat das reguldre Vieled, bev gleichem Inholte, einen kleineren Umfang als sedes andere nicht reguldre von gleicher Seitenzahl; folglich ben kleinsten.

Die folgenden ben werden noch mehrere Beispiele von Dieser Umkehrung der Sans liefern.

195.

Aufg. Unter allen Parallelepireden von derfelben Gobe und derfelben Grundflache dasjenige zu finden, web des die kleinste Oberflache bat.

Aufl. Die Grundfidde, und folgtich auch die ihr ente gegengesete Flace, bleibt ber allen Parastelepipeben, beren Minimum gesucht wird, dieselbe. Es tommt also bloß darauf an, dassenige zu sinden, worin die Summe der Seitensischen am kleinsten ift. Wegen der gegebenen Grundfiche sind aber die Grundlinien der Seitensischen unversinderlich; es muffen daher ihre Soben am kleinsten senn diese auf der Grundssichen find aber am kleinsten, wenn diese auf der Grundssiche perpendikulär stehen; folglich hat unter allen Paralleles pipeden dassenige die Kleinste Ildde, bessen Seitensischen auf der Grundssiche perpendikulär stehen.

Erft. Buf. Das gerade Parallelepiped hat baber unter allen, welche mit ihm einerlen Grundfide und gleiche Dobe, allo auch gleichen Lubifden Inbalt baben, die fleinfte Klade.

3ment. Buf. Goll bemnach ein gerades Parallelepiped mit einem ichiefen einerlen Grundfliche und gleiche Oberfiche

haben, so mus es fober als bas schiefe seyn. Alebann ift aber sein kubischer Inhalt größer. Das gerade Parallelepiped hat also unter allen, welche mit ihm einerlen Grundsidde und gleiche Obersidde haben, den größten kubischen Inhalt.

Dritt. Bul. Giebt es ein Parallelepiped, welches unter allen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche den größten kubis schen Inhalt hat, so muß es nothwendig rechtwinkelich senn; denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man auf eine seinen Gränzstächen ein gerades, von jenem verschiedenes, Parallelepte ped van gleicher Oberfläche segen; ein solches wurde aber einen größeren kubischen Juhalt haben (zwent. Zuf.), und jenes wäre also nicht das größte.

Biert. Buf. Giebt es ferner, ein Parallelepiped, wels ches unter allen Parallelepipeden von gleichem kubischen Im halte die kleinste Oberfidche hat, so muß es nothwendig rechts winkelig senn; denn ware dies nicht der Fall, so könnte man auf eine seiner Granzssächen ein gerades, von jenem verschiedenes, Parallelepiped von gleicher Sohe sepen; ein solches wärde also eine kleinere Oberfidche haben (er fl. Zus.), und es würde also jenes nicht das senn können, welches die kleinste Oberfidche hat.

f 19**6.**

Aufg. Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von gegebenem kubischen Inhalte und von gegebener Sobe, (für welche folglich auch die Grundflächen, ihrer Größe nach, gegeben find) dasjenige zu finden, welches die kleinfte Oberfläche bat.

Auft. Da die Grundfliche, ihrer Große nach, gegeben ift, so hat dasjenige Parallelepiped die kleinfte Oberfliche, wels des die kleinfte Summe der Seitenflichen hat. In rechtwim keligen Parallelepipeden von gleicher Sohe verhalten fic die Summen der Seitenflichen wie die Peripherien ihrer Grunds

flächen; also muß bie Peripheris ber Grundfläche ein Minimum sepn. Unter allen, Aechteden von gleichem Inhalte hat aber bas Quadrat ben fleinften Umfang; also muß die Grunda fläche bes gesuchten Parallelepipeds ein Quadrat sepn.

Erft. Bus. Demnach hat unter allen rechtwinkeligen nar rallelepipeden von gleicher Sobe und gleichem Lubifchen Inhalte, also auch von gleicher Grundfiche, bas mit einer quar dratischen Grundfläche die Keinfte Oberfläche.

Bweyt. Buf. Soll baher ein rechtwinkeliges Angelleles piped mit einer quadratischen Grundfiche, einem anderen mis einer nicht quadratischen Grundfiche von gleicher Hobe, en Oberfidche gleich senn, so muß das erstere eine größere Grund, stache als das leytere haben: gledann wird aber auch augleich der Inhalt des ersteren größer als der des letteren senn. Das rechtwinkelige Parallelepiped mit einer quadratischen Stundestade hat daber unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden. von gleicher höhe, und gleicher Oberfidche den größten Inhalt.

Dritt. Bus. Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipes ben von gleichem Inhalte hat der Kubus die kleinste Oberfick de; denn ware das Parallelepiped mit der kleinsten Oberfick de kein Kubus, so konnte man jede Grangfiche degelben, welche kein Quadrat ift, als die Grundfiche ansehen; alsdann wurde es aber nicht die kleinste Oberfische haben kennen (erft. 3 us.).

Piert. Buf. Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipes ben von gleicher Oberfidche bat der Rubus den größten July halt; denn befande fich unter den Grangfidchen des größten Parallelepipeds ein Rechted, so könnte man daffelbe als die Grundfidche ansehen; so betrachtet könnte aber das Parallelepiped nicht das größte fenn (zwent. Zu f.).

\$ 197.

Mins bem Borbergebenden erhalt man die folgenden swen

- 1) Unter allen geraden oder schiefen Parallstepipeden von gleichem Inhalte bat der Aubus die kleinste Obere fläche.
- 3) Unter allen geraden oder schiefen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche bat der Aubus den größten Inhalt.

Bet erfte Sag ergiedt fic aus § 195 Bu f. 4 und f 196 Bu fe 3, der gwente aus f 195 Bu f. 3 und § 196 Bu f. 4

f 198.

Aufg. Die Grundflache eines Parallelepipede ift ihrer Gestalt und Grofe nach gegeben, die Seitenflachen aber find es blof der Grofe nach; man foll dabjenige finden, welches ben größten Zubilden Inhalt hat.

Auf l. Da die Grundfläche ihrer Geftalt und Größe nach gegeben ift, so find auch ihre Seiten gegeben, b. h. die Grunds linien der parallelogrammischen Seitenflächen. Die Seitenflächen find aber ihrer Größe nach gegeben; also sind auch die Hohen berfelben gegeben.

Das gesuchte Parallelepiped muß, wegen ber gegebenen, also unveranderlichen Grundflache, die möglichst größte Sobe erhalten. Sind daber die Seitenflachen von gleicher Sobe, so muß man fie sentrecht auf die Grundflache stellen; sind sie von ungleicher Sobe, so ift die kleinste von diesen Soben die größe te, welche der Rörver erhalten kann; daber muffen in diesem Jale die Seitenflachen, welche die kleinste Sobe haben, auf der Grundflache sentrecht sieben.

J 199.

Mufg. Die Grundflache und die Seitenflachen eines

Parallelepipeds find ber Große nach gegeben; auch find Die Wintel ber Grundfläche gegeben; man foll die Bedingungen angeben, unter welchen ber Körper seinem Inhalte nach ein Maximum wird.

aufl. Da bie Bintel ber Grundfidde gegeben find, fo fen einer berfelben = a, bie benden unbefannten Geiten, mel-

de diesen Winkel einschließen, senen x, y: der gegebene In' balt der Grundsiche sen = q, der Inhalt der einen Art von Seitensichen = q', der Inhalt der anderen = q''. Nach dieser Bezeichnung ist uss der Inhalt der Erundsiche = xy Sin. \(\alpha = q', und daher \(xy = \frac{q}{\sin. \alpha} \); seiner ist die Hoe der ans der einen Art von Seitensichen = \frac{q'}{x}, die Hohe der ans deren = \frac{q''}{y}, also das Produkt dieser bevohen Hohen = \frac{q'q''}{xy}

= \frac{q'q''}{q} \sin. \(\alpha \). Die größte Höhe, welche ein Varalleseptived sir die gegebenen Stücke erhatten kann, ist demnach = \frac{q'q''}{q} \sin. \(\alpha \). Das größte Parallelepiped muß aber, wegen der gegebenen Grundsiche, die möglichst größte Höhe haben; folglich ist seine Höhe = \frac{q'q''}{q} \sin. \(\alpha \), und zwar sehen alsdann die Seitenstächen auf der Grundsiche perpentitulär.

Das gesuchte Parallelepiped ift demnach ein gerades, defi fen Höhe = $V \frac{q'q''}{q}$ Sin. α , und deffen Juhalt

= $V q q' q'' Sin, \alpha$.

3nf. Da ber Ausbrudt / qq'q" Sin. a am größten

wird, wenn Sin. a um größten ift, b. h. wenn a = 90°; fo erhalt man ben folgenden Sat:

Unter allen Parallelepipeden, deren Seitenflachen und Grundflache ihrer Große nach gegeben find, bat das rechrwinkelige ben großten kubischen Inhalt.

Der Inhalt dieses großten Parallelepipeds ift = V q q'q": feine Sobe, wenn than q fur die Grundflace annimmt, = V $\frac{q'q''}{q}$; ferner wenn q' die Grundflace ift, = V $\frac{qq''}{q'}$;

und wenn es q" ift, = $V \frac{qq'}{q''}$; dies find alfe auch die Ansebrude feiner ungleichen Kanten.

\$ 200.

Aufg. Unter allen Parallelepipeden von gleichem tus bischen Inhalte, welche einen gegebenen körperlichen Wins kel und eine gegebene Rante haben, dassenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.

Aufit. 1) Es fenen S, S', S", die dren Seitenflachen des gesuchten Narallelepipeds, a die gegebene Lante, x und x' die benden anderen Lanten, und gwar werde S von x und x', B' von a und x, S" von a und x' eingeschloffen.

- 2) Da der torperliche Wintel und die Kante a gegeben ift, so ift auch das Perpenditel, welches von dem Endpuntte dieser Kante auf die Flache S herabgelaffen wird, gegeben; und da ferner der tubische Inhalt des Körpers gegeben ift, so ift auch der Inhalt dieser Flache gegeben, und daher das Produkt xx'; dieses Produkt sen
- 5) Man ziehe nun von dem Endpunkte der Kante a auf die Linien x, x', die Perpendikel p, p'; fo find auch diese ger geben, und man hat S' = px, S" = p'x', also

$$8' + 8'' = px + p'x'.$$

4) Die Oberfidde des Parallelepipeds, namlich 28 + 28' + 28" foll ein Minimum fenn, und die Flace 8 ift gegeben; folglich muß 28' + 28", also auch 8' + 8" (= px + p'x') ein Minimum fenn. Man hat daber die folgenden zwen Bedingungsgleichungen:

 $\mathbf{x}\mathbf{x}' = \mathbf{m}$, $\mathbf{p}\mathbf{x} + \mathbf{p}'\mathbf{x}' = \mathfrak{M}$ in im um.

5) Man multiplicire die erste Gleichung mit pp', und setze $px = \frac{z + u}{2}$, $p'x' = \frac{z - u}{2}$. Hierdurch verwandeln sich dies se Gleichungen in die folgenden:

z2 - u2 = 4mpp', z = Minimum.

Aus der ersten erhölt man $z = V (4 mpp' + u^2)$, und die, ser Ausdruck muß daher ein Minimum senn. Er wird es offenbar, wenn man u' = o sest. Alsdann wird aber $px = \frac{z}{2}$, $p'x' = \frac{z}{2}$, also px = p'x'; d. h. die Flachen S', S'', sind von gleichem Inhalte.

Erft. Buf. Dieraus ergiebt fic ber folgende Sag:

Unter allen Parallelepipeden von gleichem Inhalte, welche einen gleichen körperlichen Winkel und eine gleiche Bante haben, hat dasjenige die kleinste Oberfläche, in welchem die beyden Slächen, worin die gleiche Lante liegt, gleich groß sind.

Swent. Buf. Was für eine Kante des Parallelepipeds von einem gegebenen kubischen Inbalte und mit einem gegeben nen körperlichen Winkel, man auch als gegeben anseben mag, so mussen immer in demjenigen Parallelepiped, welchem das Rinimum der Oberfläche zukommt, die berden glachen, welche diese Kante gemeinschaftlich baben, gleich groß seyn. Siere aus ergiebt sich der folgende Sag:

ther Bobe, gleich großen Geundflachen, und einer gleich großen Seitenflache, har dasjenige die Meinfte Oberflade, worin die beyden anderen Seitenflachen gleich groß find.

3ment. Buf. Ans diefem Sape tagt fic nun ber fole gende berleiten:

Unter allen geraden dreyfeitigen Prifmen von gleis der Bobe und gleich großer Grundflache, bar dasjenis ge die kleinste Oberflache, worin alle Seitenflachen gleich groß sind.

Denn stehet man nach und nach eine jebe ber Seitenflichen als gegeben an, so muffen immer die berden übrigen fur das Prisma von der kleinften Oberfliche gleich groß senn, und folglich muffen alle gleich groß senn.

Dritt. Buf. Aus diefem Saue und dem worigen Sildft fich wieder ber folgende herleiten:

Unter allen drevseitigen Prismen von gleicher gobe und gleich großer Grundstäche hat des gerade Prisma mit gleich großen Seitenstächen die kleinste Oberfläche.

§. 204.

Aufg. Unter allen Prifmen von einer gegebenen Ansahl der Stirenflathen, welche dieselbe Sobe und dieselbe Grundflache haben, bassenige zu finden, welches die Kleinfte Oberflache bat.

Aufl. Die Auflöfung ift ber in § 195 vollig ahnlich; und es ergiebt fic daraus, daß bas gerade Prisma unter allen, welche die gegebenen Bedingungen erfullen, die kleinfte Obers fiche hat-

\$ 205.

Aufg. Unter allen geraden Prifmen von gegebener Sobe, und einer gegebenen Summe und Angahl der Seis

renflachen bassenige ju finden, welches ben gröften tubis' fichen Inhalt bat.

Aufi. Da die Sobe des Prismas gegeben ift, so ift auch die ihr gleiche Johe seiner Seitenstächen gegeben; folgtich auch, wegen der gegebenen Summe der Seitenstächen, die Beripherie der Grundstächel Prismen von gleicher Sobe verschalten fich ferner wie ihre Gennoflächen. Es kommt also blog darauf an, unter allen Vieleden von gegebener Peripherie und einer gegebenen Anzahl der Seiten, dasjenige zu finden, welches den größten Fiddeninhalt hat. Diese Eigenschaft bes sitzt aber das regulare Vieled; mithin hat das Prisma mit eine mer regularen Grundstäche den größten kubischen Inhale.

. Sieraus ergiebt fic der folgende Cas:

Unter allen geraden Prifinent von gleicher Sohe, gleie, cher Summe und Angabl der Seirenflachen, bat dasjes nige, beffen Brundflache ein regulares Vielect ift, ben größten kubischen Inhalt.

\$ 206.

Aufg. Unter allen Prismen von gegebener Bobe, ger gebener Angahl ber Seitenstächen und gegebenem kubischen Inhalte, pasjenige zu finden, welches die Beinfte Summe ber Seitenflächen bat.

Aufl. Da die Sobe und der kubische Inhalt des Prifmas gegeben ift, so ift auch die Grundstäche der Größe nach gegeben. Soll ferner die Summe der Seitenstächen am kleins sten senn, so muß auch die Peripherie der Grundstäche am bleinsten senn, kunter allen Bieleden von gleichem Inhalte und gleicher Anzahl der Seiten, hat aber das reguläre Bieleeck die kleinste Peripherie: folglich ist die Grundstäche des gensachten Prismas ein reguläres Vieleck. Hieraus erziebt sich der folgende Sag: tinter allen geraden Prismen von einer gleichen Inv zahl der Seicenflachen, gleicher gobe, und gleichem Eus hischen Inhalte, hat dasjenige, beffen Grundflache regular ift, die Bleinfte Summe der Seicenflachen.

\$ 207.

Aufg. Unter allen geraden Prismen von einer gegeben nen Augahl der Seitenflachen, einer gegebenen Sobe und einem gegebenen kubischen Inhalte, dasjenige zu finden, welches die kleinfte Oberflache han

Aufl. Da die Bobe und der lubifche Inhalt des Prife mas gegeben ift, fo ift, auch feige Grundfidche gegeben. Soll also die Oberfidche ein Minimum fenn, so muß es auch die Summe der Seitenfidchen senn. hieraus ergiebt fich mit hulfe des vorigen S's der folgende Say:

Unter allen geraden Prifmen von gleicher Anzahl der Geitenflächen, einer gleichen Sobe und einem gleichen Zubischen Inhalte, hat dasjenige, welches ein reguläres Vieled zur Grundfläche hat, die kleinfte Summe ber Geitenflächen.

\$ 208.

Aufg. Unter allen geraden Prifmen von einer geges benen Angahl ber Seitenflachen, gegebener gobe und Ober, flache, dasjenige zu finden, welches den größten kubischen Inhalt hat.

Aufl. Nach dem vorigen f hat ein gerades Prisma auf einer regularen Grundfiche immer eine kleinere Oberfidce, als jedes andere von gleicher Hohe, einer gleichen Anzahl der Seistenstächen und einem gleichen kubischen Inhalte auf einer nicht regularen Grundfiche. Soll daber ein Prisma von der erften Art mit irgend einem Prisma von der awenten Art, anstatt des gleichen Lubischen Inhaltes, eine gleiche Oberfidce haben,

so muß die regulare Grundfidde des erfteren, mit Beibehale tung ihrer Regularität und Seitenzahl vergrößert werden, weil dadurch nicht bloß die Grundfidche, sondern auch jede seitenfidchen, mithin die gange Oberfidche vergrößert wird. Alsdany wird aber auch zugleich der kubische Inhalt größer. Hieraus ergiebt fich der folgende Sag:

Unter allen geraden Prifmen von einer gleichen Uns jahl ber Seitenflächen, gleicher Bobe und Oberfläche, hat basjenige, welches auf einer regularen Grundfläche flehet, den größten Lubischen Inhalt.

§ 20g.

Da der Kreis eine kleinere Peripherie hat, als fedes reguldre Bieled von gleichem Inhalte: fo hat duch ein Enline der von gleicher Hohe und gleicher Grundfidte mit einem Prisma, eine kleinere Oberfidche als das Prisma. hieraus ergiebt fic der folgende Sag:

Die Oberfläche eines Cylinders ist immer kleiner als die Oberfläche eines Prismas von gleicher Sobe und gleichem kubischen Inhalte.

Soll daber ein Cylinder mit einem Prisma von gleicher Sobe auf einer regularen Grundflache sine gleiche Oberflache haben: so muß die Grundflache des ersteren großer senn als die des letteren; alebann wird aber auch zugleich der Inhalt des Cylinders großer senn als der des Prismas. Hieraus ers halt man den folgenden Sat:

Der kubische Inhalt eines Cylinders ist immer grös ber als der kubische Inhalt eines Prismas auf einer rei gularen Grundstäche von gleicher Sobe und Oberfläche mit dem Cylinder.

§ 210. Hifsfag.

Wenn man um die Grundstäche eines geraden Cyling bets irgend ein regulares oder irregulares Vieled bescheeibt, und auf dieses Vieled ein gerades Prisma von gleicher Sobe mit dem Cylinder segt: so verhalt sich immer der Zubische Inhalt und die Oberstäche des Cylinders zu dem Inhalte und der Gberstäche des umschriebenen Prismas, wie die Deripherie der Grundstäche des ersteren, zur Peripherie der Grundstäche des letzteren.

Bew. Jeder Areis verhalt fich zu seinem umschriebenen reguldren oder irreguldren Bielede, wie die Beripherie des Areises zur Peripherie des Bieleds. Es verhalt fich demnach auch die Grundside des Enlinders zur Grundside des ums schriebenen Prismas, wie die Peripherie der erfteren Grundsische zur Peripherie der letteren. Sben so verhalt fich aber auch die krumme Fidche des Enlinders zur Summe der Seistenssichen des Prismas. Es verhalt fich folglich auch die gam ze Obersiche des Enlinders zur ganzen Obersiche des Prismas, wie die Grundsiche des erfteren zur Grundsiche des letteren, oder wie der Juhalt des erfteren zum Inhalte des letteren. Obersiche und Inhalt der bepden-Adrper verhalten fich also wie die Grundsichen selbst, oder wie ihre Peripherien.

Bensp. Das umschriebene Vieled sen ein Quadrat, at so das Prisma ein rechtwinkeliges Parallelepiped; der Halbomesser des Areises sen = r, die Höhe der benden Körper = h; so ist der Indalt des Eplinders = π roh, und seine Obersidde = 2π rh + 2π ro; serner der Indalt des Prismas = 4 roh, und seine Obersidde = 8 rh + 8 ro. Es ist aber, π roh; 4 roh = $(2\pi$ rh + 2π ro); (8 rh + 8 ro) = π ; 4

und x : 4 = 2x r : 8r = Periph. des Rreifes : Periph. des Quadrats; wie erfordert wird.

Bus. Sind die um die Grundsiden beschriebenen Biels ede für irgend zwen Enlinder einander chnlich, so hat jeder der benden Kreise, welche diesen zu Grundsichen dienen, zu seinem umschriebenen Vielede einerlen Bethältniß; folglich haben auch die Enlinder, and ihre Obersichen zu den respektivmen Prismen und ihren Obersichen einerlen Berhältniß. Sind demnach, die Enlinder an Inhalt gleich, so sind, auch die umsschriebenen Prismen an Inhalt gleich, und die Obersichen der Enlinder feben in dem nämlichen Berhältnisse zu einander als die Obersichen ihrer Prismen. Sind umgekehrt die Enlinder an Obersichen gleich, so sind auch ihre Prismen an Obersiche gleich, und die Enlinder stehen, in Ansehung ihres Inhaltes in dem nämlichen Berhältnisse ihre Prismen.

§ · 211.

Aufg. Unter allen geraden Cylindern von gleichem Enbischen Inhalt dettjenigen zu finden, welcher die kleinste Oberfinde bat.

Aufl. Man bente sich um alle Cylinder von gleichem tubischen Inhalte Parallelepipeden (alse Prismen) mit quadratischen Grundflächen beschrieben; alsbann find nach dem vorirgen § 3 u. die umschriebenen Parallelepipeden ebeufalls gleich, und ihre Obersidden sind ben Obersiden der Enlinder, um welche sie beschrieben find, proportional. Soll daher die Obersische des Enlinders ein Minimum senn, se muß auch die Obersische seines Parallelepipedes ein Minimum senn. Unter allen Parallelepipeden von gleichem Inhalte hat aber der Ausselns die Keinste Obersische (§ 197); folglich hat auch der in dem Lubus eingeschriebene Eplinder die kleinste Obersische.

Aufg. Unter allen geraden Cylindern von gleicher: Oberfläche benjenigen gu finden, welcher ben größten tus bifchen Inhalt hat.

Aufl. Denkt man sich um alle Enlinder von gleicherDberfische Parallelepipede mit quadratischen Grundsichen bes
schwieben; so sind (§ 210 Jus.) die Oberfischen der umschries
benen Parallelepipeden ebenfalls gleich, und ihr Inhalt ist
bem Inhalte der Enlinder, um welche sie beschrieben find,
proportional. Goll daher der Enlinder ein Maximum seyn,
so muß auch sein Parallelepiped ein Maximum seyn. Unter
allen Parallelepipeden von gleicher Oberfische hat aber der
Lubus den größten Inhalt (§ 297); solglich hat auch
ber in dem Rubus eingeschriebene Enlinder den größten
Inhalt.

\$ 213.

Mus § 211 und 9 212 ergiebt fic der folgende Sag: .

Der Cylinder, welcher in einem Rubus eingeschries ben werden kann, d. h. der Cylinder, dessen Sobe dem Durchmesser seiner Grundstäche gleich ist; hat unter als len Cylindern von gleichem Inhalte die Kleinste Obers fache, und unter allen Cylindern von gleicher Oberstä, che den größten Inhalt.

Es sen der Inhalt eines solden Eylinders = q, der Ourchmeffer seiner Grundsidde = x; so muß senn, $\frac{1}{4} \times x^2 = q$, und daher $x = \sqrt[3]{\frac{q}{x}}$, Unter allen geraden Eylindern von dem gegebenen Inhalte = q, hat demnach derjenige, deffen Sobe und Durchmesser der Grundsidde $= \sqrt[3]{\frac{q}{x}}$, die kleins se Obersidde.

Es sen serner die Oberstäche eines solchen Sylinders = f, der Burchmesser seiner Grundstäche = y: so muß seyn, $\frac{2}{3} \propto y^2 = f$, und daher $y = V \frac{2}{5} \frac{f}{\alpha}$. Unter allen geraden Eykindern von der gegebenen Oberstäche = f, hat demnach dersenige, dessen Hohe und Durchmesser ider Grundstäche = $V \frac{2}{5} \frac{f}{\alpha}$, den größten Inhalt.

§ 214.

Infg. AB, CD, (Fig. 205) feven zwey gleiche in ein ner und derselben Whene, die E heißen mag, liegende ger nade Linien, von gegebener Lage; der Whene parallel sey die unbegränzte gerade Linie MN, deren Projektion M'N' die Linien AB, CD, in m, w, unter gleichen Winkelm Bmn, Dnm, schneider: man soll auf der Linie MN einen Punkt P sinden, der die Liegenschass hat, daß wenn die Linien PA, PB, PC, PD, gezogen werden, die Summerder hierdurch entstandenen bevoen Drevecke PAB, PCD, ein Minimum werde.

Auft. 1) Es sen p die Projektion des Punktes P auf die Seine E, also Pp auf dieser Seine perpendikulde. Man siehe nun ph auf AB, und pk auf CD perpendikulde, wie auch die Linien Ph, Pk; so wird auch Ph auf AB, und Pk auf CD perpendikulde senn. Die Linien Ph, Pk sind also die Hohen der benden Orenede PAB, PCD. Da diese Orenede gleiche Grundlinien haben, so ist ihre Summe ein Minismum, wenn Ph + Pk ein Minismum wird.

2) Da ph = pm . Sin. pmh, und pk = pn . Sin. pnk = pm . Sin. pmh; so the ph + pk = (pm + pn) Sin. pmh = mn . Sin. pmh. Es behalt bennach ph + pk für alle Hunkte P, welche in der Linie MN liegen, bieselbe Größe,

und ift also gegeben. Nimmt man baber in der Richtung der Linie ph, pk' = pk, so ift auch hk' gegeben. Ziehet man. serner die Linie Pk', so ist Pk' = Pk, und Ph + Pk = Ph + Pk'. Goll daher Ph + Pk ein Minimum senn, so muß Ph + Pk' ein Minimum senn, folglich auch der Umstang des Orenedes hPk'. Es ist aber Pp auf hk' perpendis kuldr und gegeben; also ist auch der Inhalt des Orenedes Phk' gegeben. Unter allen Oreneden von gleichem Inhalte über derselben Grundlinie, hat aber das gleichschenkelige den kleinsten Umsang; also muß Ph = Pk' = Pk senn; also auch ph = pk' = pk; also auch pm = pn.

3) Die Projektion p des Punktes P, für metchen APB + CPD ein Minimum wird, liege demnach in der Mitte. Des Stüdes mu, welches von der Projektion M'N' swischen den Linien AB, CD, enthalten ift. Errichtet man also aus P auf die Seene E das Perpendikel pP, so ist der Punkt P, wo dasselbe die Linie MN trifft, derjenige Munkt, für welchen die Summe der Orenede APB, CPD, ein Mintmum wird.

Anmerk. In der Tigur ift angenommen worden, daß ber Punkt p zwischen den Linien AB, CD, oder ihren Berlangerungen falle. Ift dies nicht der Fall, und fallt der Punkt p außerhalb dieser Linien; so ift ph — pk anstatt ph + ph gegeben; alle übrige Schlusse bleiben wie vorber.

\$ 215.

Aufg. Unter allen Pyramiden von gegebener Sobe auf einer gegebenen regularen Grundftache biejenige gu finden, welche die Pleinste Summe der Seinenftachen bat.

Aufl. 1) Es sen ABCDE ... (Fig. 106) irgend ein res guldres Bieleck, AK eine Linie aus einer feiner Spigen durch ben Mittelpunkt besselben. Man ziehe eine beliebige Linie XX auf AK perpendikular, und sehe diese Linie als die Pro-

jektion einer anderen geraden Linte L an, welche in der gegen benen Sobie ihr parallel gezogen ift; fie werde von den Setzen des Bielecks AB, BC, 10.7; welche dieseits der Linie AC liegen, in den Punkten m, m', ic., und von den Seiten AG, GF, 10.4; welche jenseits liegen, in den Punkten n, n', 10. getroßfen. Der Punkt K, wo die Linie AL die XY schneidet, hall birt alsdann, wie leicht einzuseben ift, alle die Seilek wan, m'n', 10. der Linie XY, welche zwischen jeden zwen von Agleich weit entfernten Seiten enthalten sind.

- 2) Man bente fic nun über bem Bielegte eine Byramibe gefest, welche ihre Spige in ber Linie L bat. Die Summe ihrer brenedigen Seitenflachen über AB, AG, wird alebann nach dem porigen & far Diejenige Byramide am fleinften fenn, deren Spige die Projethon K bat. Rur Diefe Apramide ift aber auch jugleich die Summe ber Seitenflachen über BC. GF, und überhaupt die Summe jeder groen Seitenflachen, welde zwen gleich weit von A entfernte Seiten bes Bieled's gu Grundlinien haben, am fleinften. Da ferner die Seite DE, für den gall, wo die Angabt der Seiten ungerade fenn follte. ber Linie XY, also auch ber Linie L parallet' ift, so bleibt die Seitenflache über berfelben fur alle Ppramiden, beren Spigen in der Linie L liegen, von berfelben Grofe, Dierque folge nun, daß auch die Summe aller Seitenflachen, fur Diejenige Poramide, fur welche K die Projettion der Spise ift, fleiner fen, als fur jede andere Onramide, welche ihre Spige in ber Linie L Bat.
- 3) Da bies für jede Linie L gile, beren Projektion auf AL perpendikular ift, fo folgt, daß die Spipe derjenigen Poramibe, welche unter allen möglichen von der gegebenen Sobe und auf der gegebenen Grundfläche die Kleinfte Summe der

Seitenflächen haben foll, ihre Profettion in ber Linie AL ha-

- 4) Was hier für die Linie AL bewiesen worden, gilt auch für alle sandere Linien, welche aus den übrigen Spigen des Bieled's durch den Mittelpunkt befielben gezogen werden tonnen. Die Projektion der Spige den gesuchten Upramide kann demnach nirgonds anders liegen, als in dem Punkte, wo sich alle diese Linien schneiden, d. h. in dem Mittelpunkte bes Wietecks.
 - 5) hieraus ergiebt fich nun ber folgende San:

Unter allen Pyramiden von gleicher gohe und auf berselben regulären Grundstäche hat die gerade Pyramide die kleinste Summe der Seitenflächen.

Buf. Der hier gefundene Sas laßt fich auch auf folde Ppramiden ausbehnen, heren Grundfidden nicht regular, aber doch so beschaffen sind, daß fich zwen auf einander perpendis kuldre Linien angeben laffen, deren sebe die Grundfidde in gleiche und ahnliche Halfren theilt, und die man aus diesem Grunde ihre Aren nennen kann; benn für jede dieser Aren werden die Projektionen der Linien L von zwen korrespondirenden, also gleichen Seiten der Figur unter gleichen Winkelingeschnitten; woraus sich denn ferner wie in 2 zeigen laßt, daß die Projektion der Spise dersenigen Pyramide, welcher das Minimum zukommt, in benden Aren zugleich liegen muffe, also in dem Punkte, wo sie sich schneiden.

\$ 216.

Aufg. Unter allen Regeln von gleicher Sobe und gleicher Grunoffache benjenigen in finden, welcher die fleinste Frumme Glache hat.

Aufl. Die Grundflache bes Regels tann als ein regulares Mieled von unendlich vielen Soiten angefeben werben. alfo ber Regel felbst als eine Ppramide mit unendlich vielem Seitenflächen. Der San des vorigen S's auf den Regel anger, wandt, giebt demnach den folgenden:

Der gerade Regel bat eine kleinere krumme Slache, als jeder schiefe Regel von gleicher gobe und gleicher Grundsläche.

Buf. Diefer San gilt aber nicht bloß für eigentiche Resgel, d. h. folde, welche einen Kreis zur Grundfliche haben, sondern auch überhaupt für alle solche legelformige Körper, deren Grundflichen zwen auf einauber perpendituldre Aren. baben.

\$ 217.

Aufg. Unter allen dreyfeitigen Pyramiden auf einer ber Gestale und Große nach gegebenen Grundfäche, web die eine gegebene Sobe und eine bloß der Große nach ges gebent Seitenstäche haben, diejenige zu finden, für welche die Summe ber beyden anderen Seitenstächen ein Minismum wird.

Aufl. ») Ce fen ABC (Sig. 207) die gegebene Grundfiacher, und P die Spige der gesuchten Pyramide, APB die
der Große nach gegebene Seitenflache, p die Projektion des.
Punktes Palso Pp die gegebene Sobe. Nach der Aufgabe
foll nun APC + ABPC ein Miuimum senn.

e) Da das Drepect ABC ber Gestalt und Große nach ges
geben ift, so find auch feine Seiten AB, BE, AC, gegeben.
In dem Orepecte APB ist atso die Grundlinie AB, solglich
auch die Sibe Pl gegeben. In dem rechtwinkeligen Orepecte
Ppl ist also Pl und Pp gegeben, mithin der Reigungswinkt
der Flächen APB, ACB, und daher auch die Projektion APB
ber Geitensichte APB; also auch seine Ergangung zum gegee

benen Drepede ABC, namlich bie Summe ber bepben Drepe ede ApC, BpC; viefe Summe fen, = q.

5). Man siehe nun ph auf AC, und pk auf BC perpendituter; so ist auch Ph auf AC, und Pk auf BC perpendituter. Idr. Es sen AC = a, BC = b, Pp = h, ph = x, pk = y; alsbann ist Ph = 1/2 (h² + x²), Pk = 1/2 (h² + y²), solgitich APC + ABPC = 1/4 ax + 1/2 by, und 2 APC + ABPC

$$= a V (h^2 + x^2) + b V (h^2 + y^2)$$

= $V (a^2 h^2 + a^2 x^2) + V (b^2 h^2 + b^2 y^2).$

Die erfte Summe ift = q, die zwerze foll ein Minimum fenn. Man hat also gur Bestimmung der Grafen x, y, die folgendeft awer Bedingungegleichungen :

$$ax + by = 2q$$

$$V(a^ah^a + a^ax^a) + V(b^ah^a + b^ay^a) = \Re inimum$$

4) Bird ax = u, by = z gesegt, fo permandeln fich biefe Bedingungegleichungen in folgende:

V (atha + wa) + V (boha + za) = Minimum. Allgemeine Regeln für die Auflosung folder Gleichungen giebt die Differentialrechnung; hier tann man fic bes folgenden Kunftgriffes bedienen.

5) Aus den Endpunkten P, Q (Fig. 108) einer Linie PQ = 2 q, errichte man zwey Perpendikel, PM = ah, QN = bh; aus den so bestimmaten Punkten M, N, ziehe man nach irgend einem Punkte X auf der Linie PQ, die Linien MX, NX, und seinem PX = u, QX = z. Die rechtwinkeligen Oreyecke MPX, NQX, geben alsdann, MX = V (a* h* + u*), NX = V (b* h* + z*). Ran hat also,

$$u + z = 2 q_{i}$$
 $V (a^{2}h^{2} + u^{2}) + V (b^{2}h^{2} + z^{2}) = MX + NX.$

Um diese Gleichungen denen in A toblig gleich zu machen, muß also MX + NX ein Min imum senn. Es kommt also alles auf die Auftdiung dieser Aufgabe an: Auf einer gegeber nen Linie einen Punkt von solcher Beschaffenheit zu sinden, daß, wenn von zwen gegebenen, außerhalb dieser Linie liegens den Punkten, zwen gerade Linien nach jenem Punkte gezogen werden, die Summe derselben ein Minimum sen. Die Aufilösung dieser Aufgabe sindet sich im ersten Leile dieser Sammilung C 229. Es wurde dasselbst gezeigt, daß algdann die Wimtel MXP, NXQ, gleich senn wüssen. Tur diesen kall sind ober bie Orepecke MPX, NQX, einander ahrlich, und estist PX: XQ = MP: NQ, ober u: z = ah: bh = a: b. Wers den in dieser Proportion für u und z, wieder ihre Werehe aus 4 gesegt, so erhalt man ax 2 by = a: b, und hieraus von

- 6) Die Summe ber Drenede APC, BPC, (Fig. 107) ift bemnach ein Minimum, wenn x = y, b. h. wenn ph = pk. Alsbam ist auch Ph = Pk, und ber Winfel Php = Pkp.
- 7) Hieraus ergiebt sich, daß die Summe der benden Seis tenfichen APC, BPC, ein Minimum wird, wenn die Hoften berfelben und ihre Reigungswinkel gegen die Grundsiche, wie auch die Hohen ihrer Proiektionen einander gleich find.

\$ 218/

Aufg. Unter allen drevseitigen Pyramiden von gleis cher Sobe und auf einer der Gestalt und Grofe nach ges gebenen Grundfläche diejenige zu finden, welche die kleine fte Summe der Seitenflachen bar.

Aufl. Im vorigen ? wurde gezeigt, daß wenn eine ber Seitenfidden, etwa APB eine gegebene Große hat, die Summe Der benben übrigen Ridden APC, BPC, also auch die Summe aller brey Seitenfidden der Pyramide ein Minie

mum wied, wenn ph = pk. Da man nun jede der Seitenflichen als gegeben ansehen kann, so folgt, daß die dren Pers
pendikel ph, pk, pl, einander gleich fenn muffen. Der Punkt
p ift demnach der Mittelpunkt bes in dem Orenede ABC beschriebenen Kreises. hieraus ergiebt fic der folgende Sag:

Unter allen dreefeitigen Dyramiden von gleicher So, be und auf einer der Gestalt und Größe nach gegebenen Grundstäche hat diesenige die kleinste Summe der Seit tenstächen, für welche die Profesion ihrer Spige in den Mittelpunkt des in der Grundstäche beschriebenen Areis fest fällt, und sur welche daber auch sowohl die Sohen der Seitenstächen, als ihre Reigungswinkel gegen die Grundstäche von gleicher Größe kind.

\$ 220.

Aufg. Die Grundflache und eine Seitenflache einer drevseitigen Dyramide find ihren Groffe nach gegeben; auch ift die Kante, welche diese Glächen gemeinschaftlich haben, nebst der Gobe der Pyramide gegeben: man soll diejenige Pyramide finden, für, welche die Summe der Seitenflächen ein Minimum wird.

Aufi. 1) Es sen ABC (Fig. 107) die Grundside, und P die Spige einer der Ppramiden, wosur das Minimum ger sucht wird, APB die der Größe nach gegebene Seitenside, also AB die gegebene Kante; es sen ferner p die Prosettion der Spige P, alsdann find ApB, BpC, ApC, die Prosettion wen der Drepede APB, BPC, APC, auf die Grundsiche. Man ziehe die Perpenditel ph, pk, pl.

2) Die Grundlinie AB und der Inhalt bes Oreneds APB ift gegeben; also auch seine Sobe Pl. In dem rechtwinkeligen Orenede Plp, ift demnach Pl und Pp gegeben; also auch der Reigungswinkel Plp der Seitenfläche APB gegen die Grunde

flace; niso auch ApB (\Rightarrow APB. Cos. Plp); also auch, da das Drened ABC der Brose nach gegeben ift, die Gumme der Orenede ApC, BpC. Sept man daber ApC + BpC = *, fo ift s eine gegebene Größe.

- 3) Nach § 218 muß fur jede bestimmte Grundsidche, wenn APC + BPC ein Minimum fenn foll, der Bunkt P so liegen, daß die Neignugswinkel Php, Pkp, der Seitenflichen APC, BPC, gegen die Grundsidche einander gleich werden. Es sep jeder dieser Neigungeminkel = 0, und die Summe der Orevede ABC, BPC, = S.
- 4) Alsbam ist Δ ApC = Δ APC. Cos. φ, Δ BpC = Δ BPC. Cos. φ; also Δ ApC + Δ BpG = (Δ APC + BPC) Cos. φ, oder s = 8 Cos. φ. Goll das her 8 ein Minimum senn, so muß, da s gegeben ist (2), Cos. φ ein Maximum, folglich der Winsel φ ein Minismum senn. Es ist aber Tang. φ = $\frac{Pp}{ph}$, und Pp gegeben; folglich wird Tang. φ, und also auch φ ein Minimum, wenn ph = pk ein Naximum wird.
- 5) Da ApC = i ph. AC, ABpC = i pk. BC = i pk. BC = i pk. BC, so ift s = i (AC + BC) ph. Soll dabet ph eim Marimum senn, so muß AC + BC ein Minimum senn, also auch die Summe der dren Seiten der Grundfliche AC + BC + AB. Unter allen Oreneden von gegebener Grösse und auf einer gegebenen Grundlinie hat aber das gleichsschenklige den Kleinsten Umfang; folglich ist das Orened ABC gleichschenkelig, und zwar ift AC = BC.
- 6) Demnach ift die gesuchte Ppramide diejenige, fur well, de die Grundstache gleichschenkelig, und ph = pk ift.
- Buf. Bird in ber Aufgabe die Bedingung, daß eine Seitenfliche ber Große nach gegeben fen, weggelaffen; fo kann

man eine jede ber bren Seitenflächen und die ihr mit bee Grundfläche gemeinschaftliche Seite, als gegeben angefeben, und dafür die Kleinfte Summe der Seitenflächen suchen. Alsbann werden AB = AC = BC, und ph = pk = pl senn muffen. hieraus ergiebt fic der folgende Sat :

Unter allen gleich hoben dreyseitigen Pyramiden auf einer der Größe nach gegebenen Grundstäcke bat diesenis ge die kleinste Gumme der Seirenstächen, welche ein gleichseitiges Dreyeck zur Grundstäche bat, und deren Spize so liegt, daß ein Perpendikel aus dieset Spize auf die Grundstäche berabzelaffen, den Mittelpunkt ders selben trifft, sur welche daber die Seitenstächen gleiche Soben und gleiche Reigung gegen die Grundstäche haben.

\$ 220.

Aus dem Bufage des porigen S's lagt fich nun ber folgende Schluffag berteiten :

Unter allen gleich großen breyfeitigen Pyramiben bat Das Tetraeber die Pleinste Oberfläche.

Denn nimmt man eine ber Grangflachen fur gegeben an, so muß diese gleichseitig senn; weil, wenn dies nicht ware, die Summe der Seitenflachen nicht die kleinfte, also auch die Oberflache nicht die kleinfte senn tonnte. Da nun dies gilt, was fur eine Grangflache man auch fur die Grundflache an nehmen mag, so läßt fich schließen, daß alle gleichseitige Drewede sen muffen.

§ 221.

Alle die bieber gefundenen Sape für die Poramide lassen sich auch umtehren, und auf die, nun schon hinlanglich bekannte Art, beweisen. So 8. B. könnte man aus dem Sape des vorigen 5's den folgenden herleiten: Unter allen brepfeitigen Dyramiden von gleicher Obers Kache bar das Tetraeder den größten Inhalt.

Denn da das Tetraeder von gleichem Inhalte mit irgend einer anberen drenseitigen Pyramide P, eine kleinere Oberfläche hat als diese; so muß ein Tetraeder von gleicher Oberfläche mit der Pyramide P einen größeren Inhalt haben; und da dies von jeder Pyramide P gilt, so hat das Tetraeder einen größeren Inhalt, als jede andere drenseitige Pyramide von gleicher Oberfläche.

\$ 222.

Aufg. Unter allen Dyramiden von gleicher Sobe, auf Grundflächen von einer gleichen Inzahl der Seiten, gleicher Peripherie und gleichem Inhalte, diejenige zu finden, in welcher die Summe der Seitenflächen, alfo auch die Oberfläche ein Minimum ift.

Aufl. 1) Es bezeichnen A, A', A", ic. die drepedigen Szitenstächen der gesuchten Pyramide; B, B', B", die respektiven Projektionen derselben auf die Grundstäche; x, x', x'', 10. die gemeinschaftlichen Grundlinien dieser Drepede, also die Seisten der Grundstäche; y, y', y'', 10. die respektiven Höhen der Orenede A, A' A'', 10. und z, z', 2", 10. die respektiven Höhen der Orenede B, B', B'', 10. Es sen ferner die gegebene Höhe der Pyramide = h, die gegebene Peripherie der Grundsstäche = p, und ihr ebenfalls gegebener Indalt = q.

2) Nach biefer Bezeichnung hat man,

$$2A = xy$$
, $2A' = x'y'$, $2A'' = x''y''$, ic.
 $2B = xz$, $2B' = x'z'$, $2B'' = x''z''$, ic.
 $y^2 = h^2 + z^2$, $y'^2 = h^2 + z''^2$, ic.

3) Die Aufgabe fordert, daß x + x' + x'' + 2c. = p, B + B' + B' 2c. = q, A + A' + A' + 2c., oder auch Geometrie II. 2A+2A'+2A'+1t. = Minimum., Berben hierin bie Berthe aus 2 subfittuirt, fo erhalt man die folgenden Bebins gungsgleichungen:

$$x + x' + x'' + i\alpha = p$$
,
 $xz + x'z' + x''z'' + i\alpha = 2q$,
 $xy + x'y' + x''y'' + i\alpha = \text{Winimum}$.

4) Man quadrire diese drep Gleichungen; dies giebt $x^2 + x'^2 + x''^2 + 1c. + 2xx'' + 2xx'' + 2x'x'' + 1c. = p^2$, $x^2z^2 + x'^2z'^2 + x''^2z''^2$ 1c. + 2xx'zz' + 2xx''zz'' + 2x'x''z'z'' + 1c. = $4q^2$.

x²y²,+ x¹²y¹² + x¹¹²y¹¹² 10.+ 2xx¹yy¹+2xx¹yy¹+2x¹x¹y¹y¹| + 10. = Minimum.

5) Man multiplicire die effte dieser Gleichungen mit he, abdire fie hierauf gur zwenten, und ziehe die Summe von der britten abs dies giebt,

$$x^{2}(y^{2}-z^{3}-h^{2})+x'^{2}(y'^{2}-z'^{2}-h'^{2})+x''^{2}(y''^{2}-z''^{2}-h^{2})+x+2xx'(yy'-zz'-h^{2})+2xx''(yy''-zz''-h^{2})$$
 $+2x'x''(y'y''-z'z'',-h^{2})+2c+h^{2}p^{2}+4q^{2}$

$$= Minimum.$$

Begen 2 ift aber

$$y^2 - z^2 - h^2 = 0$$
, $y'^2 - z'^2 - h^2 = 0$, $y''^2 - z''^2 - h^2 = 0$, ic.;

man hat also

$$2xx' (yy' - zz' - h^2) + 2xx'' (yy'' - zz'' - h^2) + 2x'x'' (y'y'' - z'z'' - h^2) + 16 + h^2 p^2 + 4q^2$$
= $\Re inimum$.

6) Dieser Gedingungsgleichung geschiehet aber ein Genus ge, wenn man yy' — zz' — h² == 0, yy" — zz" — h² == 0, Y"y" — x'z" — h² == 0, 16. sest, weil h² p² + 4 q² gegeben ift. Regativ tonnen bie Ausbrude yy'-zz'-ha, yy"-zz"-ha nicht werben; dies läßt fich fo beweifen.

- 7) Da $y^2y'^2 = z^2z'^2 + h^2 (z^2 + z'^2) + h^4$ und immer $z^2 + z'^2 \ge 2zz'$ (well namlich $(z z')^2 = z^2 + z'^2 2zz'$ und $(z z')^2$ immer eine positive Größe iß); so if $y^2y'^2 \ge z^2z'^2 + h^2$, oder $y^2y'^2 \ge (zz' + h^2)^2$; folglich auch $yy' \ge zz' + h^2$. Es kann also yy' nie kleiner als $zz' + h^2$, und also auch $yy' zz' h^2$ nie negativ werden. Auf eine gleiche Art läßt es sich survival Ausbrücke $yy'' zz'' h^2$, $y'y'' z'z'' h^2$, zo beweisen.
- 8) Man hat demnach als Bedingung des Minimums die folgenden Gleichungen: $yy' \pm zz' + h^2$, $yy'' = zz'' + h^2$, $y'y'' = z'z'' + h^2$, ic. Oder, wenn man diese Gleichungen quadrirt, sur y^2 , y''^2 , ic. ihre Werthe aus 2 sest, und das, was sich aushiebt, wegläst, diese $h^2(z^2 + z'^2 2zz') = 0$, $h^2(z^2 + z''^2 2zz'') = 0$, ic.

ha (za + z'2 - 2 zz') = 0, ha (22 + z''2 - 2 zz'') = 0, ic. Hieraus erhalt man durch die Ausziehung der Wurzeln z = z' = z'' = ic.

9) Demnach ift die gesuchte Pyramide eine solde, in wels der die Soben der Prosettionen aller Seitenflächen einander gleich sind, in welcher folglich alle Seitenflächen eine gleiche Sobe und eine gleiche Neigung gegen die Grundfläche haben. Nimmt man ferner die Prosettion der Spige einer solchen Pyrramide für den Mittelpunkt an, und beschreibt mit dem "Halbe miffer z = 2" = 2" 1c. einen Kreis in der Sone der Grundsfläche, so berührt dieser Kreis die Seiten derselben, und estligt sich demnach innerhalb der Grundssäche ein Kreis beschreiben.

Exft. In f. Mennt man eine folde Pyramibe, wie die hier beschriebene, eine gerade, so läßt fic das gefundene Resultat so ausdrucken:

Unter allen Pyramiden von gleicher Sobe, auf Grunds flächen von einer gleichen Seitenzahl, gleicher Peripherie und gleichem Inhalte, hat die gerade Pyramide die Bleinfte Oberfläche.

3ment. Buf. hieraus ergiebt fich unmittelbar- ber foll gende Sag:

Unter allen Pyramiden von gleicher Oberfläche, auf Grundflächen von gleicher Peripherie und gleichem Inhalte hat die gerade Pyramide die größte Sobe, also auch den größten Inhalt.

Denn da eine gerade Pyramide von gleicher Sobe auf einer Grundsiche von gleicher Peripherie und gleichem Inhalte mie irgend einer schiefen Byramide P eine kleinere Oberfidche als diese hat; so muß die getade Pyramide, wenn sie mit der schiefen P eine gleiche Oberfidche haben soll, eine größert Hobe haben. Da nun dies für jede Pyramide wie P, gilt, so gilt es für alle.

Anmer t. Man vergleiche die hier gegebene analytische Auflöhung mit dem synthetischen Berfahren von Louilier in dem Thil L. § 121 d. Sammi. angeführten Berte p. 132 - 137.

§ 223.

Aufg. Unter allen geraden gleich hoben Dyramiden, auf Grundflachen von gleicher Große und gleicher Seitengabl, diejenige zu finden, welche die kleinste Summe ber Seitenflachen, also auch die kleinste Oberflache bat.

Aufl. In einer geraden Pyramide find die Reigungs winkel der Seitenfidden gegen die Grundfidde alle gleich; sollich verhalt fic die Gumme aller Seitenfidden gur Sum

me aller ihrer Projektionen, d. h. jut Grundfide, wie febe einzelne Seitenfidde ju ihrer Projektion. Man hat alfo, wenn die Bezeichnung im vorigen is benbehalten, und noch fiberdies die Summe der Seitenfidden - S gefest wirt, g: g: A: B = y: x, und daher

$$S = \frac{qy}{z} = q \frac{V'(h^2 + z^2)}{z} = q V \left(\frac{h^2}{z^2} + 1\right).$$

Soll daher S ein Minimum fehn; so muß, da q gegesten ift, $V\left(\frac{\ln x}{x^2} + 1\right)$ ein Minimum, und also x ein Max ximum senn. Es ist aber in der geraden Pyramide q = pz; also muß, wenn z ein Maximum senn, soll, p ein Minto mum senn. Unter allen Vielecken von gleichem Indaste und gleicher Seitenzahl hat aber das reguldre Vieleck die kleinste Peripherie; also ist die Frundsiche der gesuchten Pyramide ein reguldres Vieleck.

Dieraus ergiebt fich ber folgenbe Gang

Unter allen geraden gleich hoben Dyramiden, auf Grundflachen von gleichem Inhalte und gleicher Setz tenzahl, bat diejenige Dyramide, deren Grundflache res gular ift, die kleinfte Oberflache.

224

Lehrfan, Eine gerade Dyramide von gegebener Gobe, auf einer regulären, der Broffe nach gegebenen Grunde flache hat eine defto kleinere Oberflache, je größer die Seistenzahl ber Grundfache ift.

Bew. Die Bezeichnung bes vorigen S's benbehalten, ift $S=q\ V\Big(\frac{h^2}{z^2}+1\Big)$. Es wird also 8, und folglich auch die Oberfiche besta Keiner senn, je größer a ift. Könnte

man baber beweisen, baß einem regularen Bielede von einer größeren Seitenzahl, ben gleichem Inhalte, ein größeres z gntommt, als einem eben solchen Bielede von geringerer Seitenzahl; so ware der San erwiesen,

Daß fic dies aber wirklich fo verhalte, tam auf die fole genbe Art gezeigt werben.

Man bente sich um einem Kreise zwen verschiedene reguläre Pieled's beschrieben; alsbann wird dassenige, welches die größere Seitenzahl hat, dem Kreise näher kommen, und das her anch einen Keineren Inhalt haben. Soll also ein Vieled nop einer größeren, mit dem von einer geringeren Seitenzahl, einen gleichen Inhalt haben; so muß der halbmesser des eine geschriebenen Kreises, also z. größer sepn.

\$ 225.

Ans I 222, 223, 224, ethalt man die folgenden allgemeisen Sage:

1) Eine gerade Pyramide auf einer regularen Grunds flache hat immer eine kleinere Oberflache als jede aus dere, gerade oder schiefe Pyramide von gleicher Sobe, eben so großer, aber betiebig gestalteter Grunds flache, mit einer gleichen oder geringeren Seitenzahl.

Dieraus ferner :

- 2) Der gerade Begel hat eine kleinere Oberfläche als jede gerade oder schiefe Pyramide von gleicher Sche und gleicher Grundstäche.
- 3) Der gerade Regel bat eine Meiners Gberfiache ale jeder schiefe Begel von gleicher Sobe und gleicher Grundflache. (Dieser Say tann auch aus § 216 abger lettet werden.)
- 4) Der gerade Regel bat eine kleinere Oberfläche als

jeber gerade oder: schiefe kegelformige Rorpen von gleicher Sobe und gleich großer Geundstäche.

Ein Reget kann namlich als eine Ppramide auf einer regularen Grundsiche von unendlich vielen Seiten, und ein kegelformigen Körper, (d. h. ein solcher, welcher irgend eine besliebige krummlinige Figur zur Grundsiche hat) als eine Ppskamibe auf einer nicht regularen Grundsiche von unendlich wielen Seiten angesehen werden; was daher von dieser gilt, gilt auch von jenem.

£ 226.

Dulfsfag.

1 Wenn um einen geraden Regel eine Pyramide beschries ben wird; so verhalt sich der Inhale und die Oberstäche des Regels zu dem Inhalte und der Oberstäche der Pyras mide, wie die Peripherie der Grundstäche des Regels zur Peripherie der Grundstäche des Regels zur

Beweis. 1) Da ber Regel und die umschwiebene Pyras mibe eine gleiche Sohe haben, so verhalten fie fich wie ihre Grundflachem Ein Areis verhalt fich aber zu seinem umschries benen Bielede, wie die Peripherie des Areises zur Peripherie des Bietedes, also verhalten fich auch jene Korper, wie die Peripherien ihrer Grundflachen.

2) Die Seite des Regels if augleich die Sobe einer jeden Seitenfidche der Pyramide; also verhalt sich die krumme Alde die des Regels gur Summe der Seitenfidchen der Pyramide, wie die Peripherie der Grundfidche des erfteren gur Peripher rie der Grundfidche der legteren. Son so verhalten sich aber auch die Grundsidden selbst; also auch die Oberfidchen der Ropper.

Erft. Buf. Werben um zwen betiebige Rreife ahnliche Bielede beschrieben; fo bat die Peripherie eines jeden biefer

Rreise zur Pertoberie seines Bieledes einerlen Berhaltnis. Werden demnach um zwen beliebige Regel Pyramiden mit ahnlichen Grundsichen beschrieben; so hat auch der Inhals oder die Oberstäche eines jeden dieser Regel zu dem Inhalte oder der Oberkläche seiner umschriebenen Pyramide einerlen Berhaltnis. Es verhalten sich demnach auch ldie Regel, in Ansehung ihres Inhalts und ihrer Oberstäche, wie diese Preramiden.

Ament. Auf. Sind demnach zwen Regel an Inhalt gleich; so find auch die umschriebenen Pyramiden auf chntia den Grundsichen au Inhalt gleich, und die Oberstächen diex sexel steben in dem nämlichen Berbellsnisse zu einander, als die Oberstächen ibrer Pyramiden. Sind umgetehrt die Reget an Oberstäche gleich, so find auch ihre Pyramiden an Oberstäche gleich, und die Reget steben in Unsehung ihren Inhalts in dem nämlichen Werhältnisse als ihre Pyramiden.

§ .227.

Aufg. Unter allen geraden Regeln von gleichem Ine balte benjenigen ju finden, welcher die kleinfte Oberfläche bat; und umgekehrt, unter allen geraden Regeln von gleicher Oberfläche denjenigen zu finden, welcher ben größe ten Inhalt hat.

Aufl. 1) Man beute sich um alle Reget von gleichem Inhalte brenseitige Pyramiden mit gleichseitigen Grundstächen beschrieben: aledann find nach dem vorigen & Zuf. 2 ple ums schriebenen Pyramiden ebenfalls gleich, und ihre Oberstächen stehen in dem namlichen Verhaltnisse, als die Oberstächen der Regel, um welche sie beschrieben find. Soll daber die Oberstschapen des Regels ein Minimum senn, so muß auch die Oberstäche seiner Pyramide ein Minimum senn, lenn. Unter ale lem drenseitigen Pyramiden von gleichem Inhalte hat aber

das Cetraeder die kleinfte Oberftiche (§ 220); folglich hat auch der in dem Cetraeder eingeschriebene Regol die kleinfte Oberfiche.

2) Denkt man fich um alle Reget von gleicher Oberfiche berpfeitige Pyramiden mit gleichfeitigen Grundsichen beschrieben; so sind (§ 226' Jus. 2) die Obersichen dieser Pyramis den ebenfalls gleich, und ihr Inhalt ist dem Inhalte der Rezgel, um welche ste beschrieben find, proportional. Gold daher dem Regel das Maximum des Inhalts zukommen; so muß auch seine Pyramide ein Maximum seyn. Unter allen drem seitigen Pyramiden von gleicher Obersiche hat aber das Letz raeder den größten Inhalt (§ 221); solglich hat auch der in dem Letraeder beschriebene Regel den größten Inhalt.

Bus. Es ift nicht schwer einzusehen, daß die Seite des in einem Letraeder eingeschriebenen Regels drenmal so groß als der Halbmesser seiner Grundfliche-sen. Demnach giebt ein Regel, deffen Seite drenmal so groß als der Halbs messer seiner Grundfliche ift, ein Minimum der Oberfliche ben gleichem Inhalte, und ein Maximum des Inhalts ben gleicher Oberfliche.

§ 228.

Aus allen dem, mas bieber gefunden worden, ergiebt fich win ber folgende Schlubfat :

Ein gerader Regel, dessen Seite dreymal & groß ift, ale der haldmesser seiner Grundstäche hat eine kleie nere Oberstäche als jede Pyramide, oder als jeder Regel und kegelformige Körper von gleichem Inhalte, und ums gefehrt, einen größern Inhalt als jede Pyramide, und als jeder Regel und kegelformige Körper von gleicher Oberstäche.

Wenn man aus dem Mittelpunkte O (Fig. 109) eines reguldren Sechsedes ABCDEF nach den Endpunkten B, D, F, deffelben die Linien OB, OD, OF ziehet, so erhält man drewgleiche und ahnliche Rhomben-BAFO, BCDO, DEFO. Je also ABCDEF die obere Klache eines sechsseitigen Prismas, so läst fich dasselbe in dren vierseitige Prismen mit rhombischen Grundsichen zerlegen, deren abere Flächen die vorder genannten Rhomben sind.

Es fen ABOFPOR eines diefer Brifmen. Man giebe bie Diagonale BF, und lege burch diefe Linie und burch einen beliebigen Punkt X ber ihr gegenüber liegenden Seitenlinie AQ eine Gbene BXF. Die Borgmide XABF, welche hierburch pon dem Brifma abgefdnitten wird, 'laffe man fic um BF fo lange dreben, bis das Dreped BAF auf das Dreped BOF fallt, und fo bie Pyramide XABF in XBOF au liegen kommt. Alsbann ift bas Oreped BX'F bem Orepede BXF abnlich aleich und mit ihm in einer Cbene; folglich BX'FX em Rhombus. Das abgefürste vierfeitige Brifma BX'FXPOR, welches bieraus entflebet, ift dem Drifma ABOFPQR an Ine balt gleich, weil die abgeschnittene Onramide XABF burd die hinzugekommene X'BOF erfest worden. Läft man eben fo in den benden übrigen vierfeitigen Primen, beren obere Rlachen bie Rhomben BCDO, DEFO find, Die Grundflachen BCD, DEF, der abgeschnittenen Apramiden fic um die Dias gonalen BD, DF, breben; fo merben fich bie Spifen aller Diefer Ppramiden in einen einzigen Buntt X' vereinigen, wos burch diefer Puntt Die Spige eines von dren Rhamben begraus ten forperlichen Winkels wird.

Durch die angegebene Conftruktion erhalt man nun einen fechsfeitigen prismatischen Korper mit einem von Rhomben gef

bildeten, in einer Spife auslänfenden Dache, trapetiichen und gleichen Geitensiächen, einer regutaren Grundsiäche und zweners len Seitenlinien. Sein Inhalt ift dem Inhalte des sechsseits gen Prismas gleich, weraus er entftanden ift, aber seine Flasche ift verschieden.

§ 230.

Aufg. Unter allen Körpern von der im vorigen & beschriebenen Art, welche einen gleichen Inhalt und einers les Grundstäche haben, deujenigen zu sinden, welcher die Pleinste Oberstäche hat.

Muft Da alle Rorper, fur welche hier bas Minimum ber Oberfidche gefucht wird, einerlen Inhalt und einerlen Brundflace baben follen, fo muffen fie alle aus demfelben fechsfeitigen Prifma erzeugt worden fenn. Goll nun bie Obers fidbe des Rorpers ein Minimum werden, fo muß aud. mes den der gegebenen Grundflade, Die Summe der Seitenfidden und der Rhomben des Daches, ein Minimum werden, ober, welches auf bas Mamliche binauslauft, es muß in jedem ber pierfeitigen Prifmen, worin bas fedefeitige gerlegt worden, die Summe ber Bliden BXTX, BXQP, FXQR, ein Minis mum werden, und baber auch die Salfte Diefer Summe. Da nun ABXF = I Rhomb. BX/FX, und Erap. BXQP == Erap. FXQR; so ist & BXF + Erap. BXQP = I [Abomb BX'FX + Trap. BXQP + Trap. FXQR]; es muß alfo aud A BXF + Erap. BXQP ein Minimum werden. Es ift aber A BXF + Erap. BXQP = ABXF + Prig. ABPQ - ABX, und Prigr. ABQP gegeben; folglich muß ABXP - A BAX ein Minimum werden. Die Aufgabe ift alfo darauf reducirt, ben Buntt X ju finden, fur melden △ BXF - △ ABX ein Minimum wird.

Es fen bie gegebene Linie AB = 2a, die gefichte

AX = x. Man siehe AK auf BF perpendikular, und hiere auf die Linie KX; so ift auch KX auf BF perpendikular. Es ist also

AK = AB: Sin, ABK = 24 Sin, 50° = 4

BF = 2 BK = 2 AB Cos, 50° = 2 a V 5

KX = V (AK* + AX*) = V (a* + x*) \triangle ABX = $\frac{1}{2}$ BA . AX = $\frac{1}{2}$ \$ \triangle BXF = $\frac{1}{2}$ BF . KX = a V (5 a* + 5 x*) \triangle BXF - \triangle ABX = πV (3 a* + 5x*) - ax.

Ce muß demnach a V (3 a2 + 3 x2) — ax, und folglich auch. V (3 a4 + 3 x2) — x ein Minimum werden. Man fege dies fen Ausbruck — u; aledann muß u ein Minimum werden. Die Auftösung ber Gleichung

 $V(3a^2 + 3x^2) - x = u$ glebt gber

$$x = \frac{1}{2}u \pm \frac{1}{2}V(3u^2 - 6a^2),$$

Da nun x nicht imaginar werden barf, so ift der kleinfte Werth, den man fur u annehmen kann, der, für welchen zu^2 - 6 a² = 0, oder u = a 1/2. Diese Annahme giebt aber x = ½ u = ½ a 1/2; demnach ift für das Minimum x = ½ a 1/2.

Man hat also für den Körper, welchem die kleinfte Obers fliche gulommt, wenn die Seite seiner reguldren Grundsiche = 2 a, und die langere Seitenlinie destelben ober RP = 1 gei fest wird, die solgenden Abmessungen:

AK = a BF = 2 a V 3 AX = i a V 2; also XQ = AQ - AX = 1 - i a V a KX = V (AK* + AX*) = i a V 6 $BX = V(AB^{a} + AX^{a}) = \frac{1}{2} a V$ Cos. $BXA = AX : BX = \frac{1}{2}$

atio BXA = 70° 31' 44", BXQ = 109° 28' 16"

Cos. $BXK = KX : BX = \frac{1}{2} \sqrt{3}$

also BXK = 54° 44′ 8″, BXF = 2BXK = 109° 28′ 16″

 $\triangle ABX = \frac{1}{2}AB \cdot AX = \frac{1}{2}a^2 \sqrt{2}$

alfo Erap. BXQP = Prigr. ABPQ - \(\triangle ABX = 2al - \frac{1}{2}a^2\sqrt{2}a \)
\(\triangle BXF = \frac{1}{2}BF \cdot KX = \frac{1}{4}a^2\sqrt{2}a \)

also Rhomb. BX/FX = 3a2 1/ 2.

Die ebenen Bintel BXF, BXQ, FXQ, welche die Ede ben X bilben, 'find also alle einander gleich, (namlich jeder = 109° 28' 16") folglich find auch die Neigungswinkel ihrer Ebenen einander gleich, und zwar ist jeder = 120° (weil nam, lich der Neigungswinkel BAF det Ebenen BXQP, FXQR, = 120° ift).

Die Spige X' bes Daches wird von ben namlichen Bim feln gebildet als die Ede X; also find auch die Reigungswins tel ihrer Ebenen alle' einandet gleich und jeder = 1200.

Die Rhomben des Daches find daber fowohl gegen einanber als gegen die Seitenflichen des Korpers unter einem Winkel von 120° geneigt.

Die Grundfläche des Körpers ift = $6a^2 \sqrt{3}$; also ber Inbalt beffelben = $6a^2 \sqrt{3}$.

Die Obersiche des Körpers bestehet aus sechs Erapezen wie BXPP, aus dren Rhomben wie BX/FX und aus der sechsseitigen Grundsiche. Sie ist deminach ohne die Grundssiche = 12al $+ 6a^2 V 2$, mit der Grundsiche = 12al $+ 6a^2 (V 2 + V 3)$.

Die Oberfidde eines geraden Prismas von der Sobe & auf dieser Grundsidde ift ohne dieselbe = 12 al4 + 6a° 1/3. Es verhalt fich also die Oberfidde des Körpers gur Oberfidde

des Prismas (die Grundsiche nicht mitgerechnet,) wie (21 + a 1/2): (21 + a 1/3).

Die Verringerung der Obersiche, welche entstehet, wenn anstatt der oberen Floche des Prismas das pyramidalische Dach gesett wird, if =6 a² (V 3 \rightarrow V 2).

Anmerk. Unter den regularen Bieleden giebt es nicht mehr afs dren, deren Polygonwinkel atiquote Theile von vier Rechten find, oder mit andern Worten, deren Winkel so groß sind, daß sich eine gewisse Anzahl derselben genau um einen Punkt herum legen läst; und diese sind das Orened, das Quadrat und das Sechseck. Der Winkel eines necks ist namlich = $\frac{2n-4}{n}$ R; also muß $\frac{2n-4}{n}$ R=4R, und m eine ganze Bahl senn. Diese Gleichung giebt aber $\frac{2n}{n-2}$ es muß demnach $\frac{4}{n-2}$ eine ganze Zahl senn. Es kann aber $\frac{4}{n-2}$ nur dann eine ganze Zahl senn, wenn n=3, wher n=4, oder n=6.

Bezeichnet s die Seite, p den Umfang und q den Inhalt eines reguldren Wieled's, so ift p=ns, q=1 ns^2 Cot. $\frac{180^\circ}{n}$. Substituirt man den Werth von s aus der zwehten Steichung. in der ersten, so erhalt man p=2V $q\cdot V$ n Tang. $\frac{180^\circ}{n}$. Diese Kormel giebt das Verhältniß zwischen dem Umfange und dem Inhalte eines seden regularen Bieleckes. Nan seze nun nach einander n=3, n=4, n=6; so erhalt man p=2V $q\cdot V$ (3V3), p=2V $q\cdot 2$, p=2V $q\cdot V$ (2V3). Es verdalten sich demnach den gleichem Inhalte die Verspher rien des Orenecks, Vierecks und Sechseckes wie die Zahlen

V(3V5), 2, V(2V3). Da nun die lette von diefen dren Bahlen die kleinfte ift, so folgt, daß das Sochsed ben gleir dem Inhalte einen kleineren Umfang hat, als das Orepeck und Biered.

Da die Bienenzellen gerade die fechefeitige Form haben, so wurde icon Pappus badurch zu der Bemerkung verans laft, daß die Bienen unter allen den verschiedenen Formen, welche um einen Punkt herum den Raum ausfüllen, deshatb die secheseitige gewählt hatten, weil fie merkten, daß diese Form mehr Raum gebe als die drepfeitige oder vierseitige.

Die Bienenzellen find aber nicht blog fechefeitig prifmas tifc geformt, fondern fie haben auch ein von Rhomben be-'arangtes Dad, gerade wie die vorbin unterfucten' Rorper; und die Abomben find fowohl gegen einander als gegen die Seitenflachen des prismatischen Theiles Der Belle unter einem Bintel von 1200 geneigt. Sie haben alfo gerade bie Grofie. welche fie haben muffen, wenn ben bem namlichen innern Raume Die Quantitat des jur Conftruttion nothigen Bachfes am geringften fenn foll. Dag auch bie Erfparung an Bachs nicht Sauptzwedt, nur Rebengwedt fenn; mag felbft, mie-L'huilier febr richtig bemertt, es noch andere formen ges ben, woben diefe Erfparung noch meiter getrieben werden Bonnte: fo bleibt doch immer diefer Bau bewundernsmurdig genug, um einige Aufmertfamteit ju verdienen. (Heber bie Gefdichte biefes Gegenstandes, i. m. Rlugels mathem. Bors terb. 26. II. S. 693 u. f.)

XV. Gleichungen fur Die gerade Linie, Die Ebene, ben Rreis und die Rugel; Gebrauch berfelben ben ber Auflosung geometrischer Aufgaben.

§ 231.

Wenn in irgend einer Stene, die E heißen mag, eine gestade unbegranzte Linie AB (Fig. 110), und auf ihr ein Punkt A angenommen oder gegeben wird; so ift jeder andere Punkt M der Stene E völlig bestimmt, wenn das positive oder nezgative Perpendikel Mm, welches von diesem Punkte auf die Linie AB herabgelassen wird, und zugleich die Entsernung Am den Punktes m von A gegeben ist. Diese Art, die Lage eines Punktes anzugeben, wurde schon Eh. I. d. Samml. § 84 u. f. angewandt. Her soll ein anderer Gebrauch davon gemacht werden.

Es schneibe irgend eine gerade unbegrangte Linie PQ die Abschissenlinie AB unter dem Wintel QCB = α ; die Entsernung des Ourchschnitzspunktes C vom Punkte A sep = d. Es sep serner M frgend ein Punkt auf der Linie PQ; die diesem Punkte zugehörige Abschisse Am = x, und seine Ordinate Mm = y. Alsbann ist Mm = Cm. Tang. α = (Am + AC) Tang. α , oder y = (x + d) Tang. α . Sest man Tang. α = a, d Tang. α = b; so erhält man

y = ax + b.

Diefe Gleichung, durch welche die Beziehung zwischen ben Coordinaten Am, Mm, eines jeden Punttes M auf der Lienie PQ ausgedruckt wird, kann keinem gnderen Puntte der Chene

Chene E auferhalb diefer Linie gutommen; fie wird aus dies fem Grunde die Gleichung ber Linie PQ genagnt.

Renner man ben Neigungswinkel einer geraden Linte gegen die Abscissenlinie, wie auch die Entfernung bes Durch, schnittspunttes vom Anfangspuntte ber Abscissen; so lagt fich jedesmal die Gleichung fur diese Linie finden.

Ift umgekehrt die Gleichung einer geraden Linie y=ax+b gegeben; fo lagt fich a und d aus den benden Gleichungen

Tang.
$$\alpha = a$$
, $d = \frac{b}{\text{Tang. } \alpha} = \frac{b}{a}$

bestimmen.

Man kann auch, wenn man will, der Gleichung y=ax+b die Form Ax+By+C=o geben. Die zwente wird namelich aus der ersten erhalten, wenn man diese mit B multiplikeirt, alles auf eine Seite des Gleichheitszeichen bringt, und hierauf -aB=A, -bB=C sept; und in diesem Falle ist Tang. $\alpha=a=-\frac{A}{B}$, $d=\frac{b}{a}=\frac{C}{A}$ Man siehet hieraus,

Daß die Lage der geraden Linie, weiche durch die Gleichung Ax + By + C = o gegeben ift, nicht sowohl von den wirk- lichen Zahlenwerthen der Größen A, B, C, als vielmehr von ihren Berhaltniffen zu einander abbangt. Dies erhellet auch schon daraus, weit der Faktor B, womit die Gleichung y = ax + b multiplicirt wird, willturlich angenommen werden kann. Ich werde jedoch im Anfange, der Deutlicht keit wegen, die Gleichung y = ax + b berbehalten.

§ 232.

Aufg. Die Gleichungen für zwey sich schneibende gerade Linien find gegeben: man foll die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes finden.

Geometrie IL

Muft. Es fenen

$$y = ax + b$$
, $y = a'x + b'$

Die Bleichungen bet benben geraben Linien, beren Durche fchnittspuntt gefucht wird.

Da der Durchschnittspunkt ben benden Linien, gemeinschaft lich ift; so muffen fich fur x,'y, folche Werthe finden laffen, welche den benden Gleichungen zu gleicher Zeit ein Genüge thun. Bezeichnet man daher die Coordinaten des gesuchten Punktes durch x', y'; so muß fur diesen Punkt x = x', und y = y' senn'. Man erhalt also aus den obigen Gleichungen die solgenden:

$$y' = ax' + b, y' = a'x' + b'$$

und biefe geben, mit einander verbunden,

$$x' = -\frac{b'-b}{a'-a}$$
, $y' = \frac{a'b-ab'}{a'-a}$

§ 233.

Aufg. Eine Linie PQ (Fig. 110) foll durch 3wey, vers mittelft ihrer Coordinaten gegebenen Dunkte M', M", ge ben: man foll die Gleichung dieser Linie, den Winkel, uns ter welchem ste die Abschiffenlinie schneidet, wie auch die Lange des, zwischen den Punkten M' M", liegenden Studes M'M" finden.

- Auft. Es fepen x', y', die gegebenen Coordinaten des Bunttes M' und x", y", die ebenfalls gegebenen Coordinaten des Bunttes M". Es fen ferner y = ax + b die gesuchte Gleichung der Linie PQ, in welcher die Großen a, b, für jest unbekannt find.
- 1) Da die Punkte M', M", in der Linie PQ liegen; fo muß die angenommene Gleichung fur bende Punkte ftatt fine den konnen; d. h. fie muß wahr werden, wenn man sowohl

x4, y4, als x4;:1344, tar x y fabfittuire. Diefe Substitutionen geben aber,

$$y' = ax' + b$$
, $y'' = ax'' + b$.

Man hat also swed Gleichungen zwischen den unbekannten Größen a, b, und den bekannten x', y', x", y"; es laffen fich also die erfteren aus den letteren bestimmen. Durch die Auf. losung dieser Gleichungen erhalt man,

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}, b = \frac{x''y' - x'y''}{x'' - x'}.$$

Die gesuchte Gleichung ift bemnach ::

$$y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} x + \frac{x''y' - x'y''}{x'' - x'}$$

2) Es fen a der Mintet, unter welchem die Linie PQ die Abscissenlinie schneidet; alsdann ift (\$ 232) Tang, a = a.

Nach a ift aber
$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$
; man hat also,

Tang.
$$\alpha = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$
.

Dieses batte man auch unmittelbar aus ber Figur selbst finden können; benn ziehet man die Linie M'p' ber AB parallel, so find bie Wintel M'M'p, QCB, einander gleich; man hat also

Tang.
$$\alpha = \text{Tang. } M''M'p = \frac{M''p}{M'p} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$
.

5) De M'M" = $V [(M'p)^2 + (M''p)^2]$, uni M'p = x'' - x', M''p = y'' - y'; fo iff, $M'M'' = V [(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2]$.

\$ 234

Unfg. Die Gleichungen für zwey gerade Linien find

gegeben: man foll ben Wintel finden, unter welchen fie fichneiden.

Aufl. Es senen y = ax + b, y' = a'x + b', die gegebenen Gleichungen der Linien PQ, P'Q' (Fig. 111); die
Bintel QXB, Q'X'B, unter welchen fie die Abfriffenlinie
schneiden, bezeichne man durch a, a', und den Bintel PMP',
unter welchen fic bie Linien selbst schneiden, durch p.

Dies vorausgesett, hat man nach § 231, Tang. $\alpha = a$; Tang. $\alpha' = a'$. Es ift aber $\varphi = \alpha' - \alpha$; man hat also,

Tang.
$$\varphi = \frac{\text{Tang. } \alpha' - \text{Tang. } \alpha}{1 + \text{Tang. } \alpha' \text{ Tang. } \alpha} = \frac{a' - a}{1 + \epsilon' a}$$
.

Er ft. Zu f. Sollen sich deminach die benden Linien umter rechten Winteln schneiben; so muß $\varphi=90^\circ$ sewn. In die sem Kalle ist aber Tang. $\varphi=\infty$; es muß demnach der New per des sur Tang. φ gefundenen Ausdruckes =0 seyn. Man dat also $1+e^a=0$; waraus man $a'=-\frac{1}{a}$ erhalt. Hiere aus folgt, daß wenn die Linien P'Q', PQ auf einander perpens dikular stehen sollen, ihre Gleichungen norhwendig die folgende Form haben mussen:

$$y = ax + b$$
, $y = -\frac{1}{a}x + b'$.

Imay t. Zu f. Sollen aber die benden Linien einander parallel fenn; so muß φ , folglich auch Tang. $\varphi = 0$ fenn. Wan hat also $\frac{a'-a}{1+a'a} = 0$; woraus man a'=a erhalt. Die Gleichungen für parallele Linien muffen demnach die folgende Form haben,

$$y = ax + b$$
, $y/ = ax + b$.

Man batte Diefes Resultat auch unmittelbar bardus berleiten

Winnen, bas für parallele Linien bie Binfel, unter welchen fie Absciffenlinie schneiden, einander gleich find, und baber Tang, al m Tang, a, ober a' == 4.

Aufg. Die Bleichung einer geraden Linie ift geger ben: man foll die Gleichung einer anderen finden, web die jene unter einem gegebenen Winkel schneider, und durch einen gegebenen Punkt geher.

Auft Die Coordinaten des gegebenen Prittes seinen x', y'; die Edngente des gegebenen Winkels sen = t; die Gleichung der degebenen Linie, y = ax + b; die Gleichung der gefuchten Linie y = a'x + b'. Es muffen nun a' und b' aus den gegebenen Gebingungen bestimmt werden.

1) Nach der Aufl. des vor, S's iff $t = \frac{a'-a}{1+a'a}$. Hiers aus erhalt man.

$$a' = \frac{t + a}{t - at}$$

2) Da die gesuchte Linie durch ben Punkt geben soll, bessen Coordinaten x', y', find; so hat man y' = a'x' + b'; woraus man b' = y' - a'x' erhalt. Wird dieser Werth in det Steichung y = a'x + b' substituirt; so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende:

$$y = a'x + y' - a'x',$$

oder

$$y-y'=a'(x-x').$$

, 3) Wird hierin für a' fein Werth aus 1 fubfituirt; fo

$$y-y'=\frac{t+a}{t-at}(x-x');$$

und dies ift die Gleichung fur die gesuchte Linie.

die Coordinaten bes Punktes p angesehen werden, und eben so, die kinien Am" (= y), m"p" (= z), als die Coordinaten des Punktes p", und Am' (= z), m'p' (= x) als die Coordinaten des Hunktes p', Aus diesem Geschispunkte betracktet, kann man auch sagen, der Punkt M werde bestimmt, durch seinen Abstand von irgend einer der dren Sbenen, und durch die Coordinaten seiner Projektion auf diese Gbene.

Liegt der Punkt M in der Stene BAC, so ift z = 0; liegt er in der Stene BAD, so ist y = 0: liegt er in der Stene CAD, so ist x = 0. Für einen Punkt auf der Are AB ist so wohl y als z = 0; sur einen Punkt auf der Are AC ist x and x = 0; für einen Punkt auf der Are AD ist x und y = 0.

\$ 238.

Aufg. Die Gleichung einer Ebene gu finden.

Aufl. Es senen wieder, wie in Fig. 112, ABC, BAD, CAD (Fig. 113), die toordinirten Sbenen: AB, AC, AD, die toordinirten Wrenz; und es werde guerft die Gleichung einer Ebene HAK gesucht, von welcher angenommen wird, daß sie burch den Punkt A gehe. Es sepen AH, AK, die Schnitte tiefer Sbene mit den Gbenen DAC, BAD.

- 1) Es sein M ein Punkt der Ebene HAK; Am, mp, pM, ite Coordinaten dieses Punktes; also Am = x, mp = y, iM = z. Man siehe pm" der AB, und m"h, mk, der pM arallel, sie schneiden die kinien AH, AK, in h, k; mache terauf pl = mk, und siehe m"l, kl. Wird ferner Mh ger zgen, so sind die kinien Mh, AK, als Schnitte zweizer paraleten Ebenen Mhm"l, KAB, durch eine dritte HAK, eigander arallel.
- 2) Da pl der mk gleich und parallel ift; fo find die Lie ien mp, kl, mithin auch Am" gleich und parallel; also ift

euch m"l der Ak, und daher auch ber Mh parallel; folglich ift Mhm"l ein Parallelogramm, und daher Ml = hm".

- 3) Die Wintel HAC, KAB, bleiben für alle Puntte ber Seine HAK dieselben; man kann fie daher als gegeben anser, hen, also auch ihre Langensen. Man sesse Tang. KAB = a, Tang. HAC = b; aledann ist in dem ben m rechtwinkeligen Dtepede Amk, mk = Am. Tang. KAB = ax, und in dem ben m" rechtwinkeligen Prepede hAm", hm" = Am" Tang. HAC = mp. Tang. HAC = by.
 - 4) Hieraus erhalt man nun Mp = Ml + Ip=hmi' + mk.

 = ax + by. Es ift aber Mp = z; also z = ax + by; und bies ift die Sleichung einer Ebene, welche durch ben Plankt.

 A gehet.
 - 5) Sehet die Sbene, deren Gleichung gesucht wird, nicht burch ben Punkt A, wie etwa die Sbene PQR; fo kann man fich doch immer durch A eine Sbene der vorigen parallel ger legt denken, und für diese gilt die Gleichung z = ax + by. Run ift aber jedes z für die Sbene PQR um das Stück AQ größer als für die Sbene HAK; seht man demnach AQ = cz so ift die Gleichung für jede Sbene,

$$z = ax + by + c$$

Erf. Buf. Um diefer Gleichung eine regelmäßigere Gefalt zu geben, multiplicire man fie mit irgend einer Große C, und fese hierauf — aC = A, — bC = B, — cC = D; hiers burd verwandelt fie fich in die folgende:

$$Ax + By + Cz + D = a$$

3ment. Bu f. Aus ber Art, wie ble Steichung Ax + By + Cz + D = o gefunden worden, erhellet augleich, daß für jede Sene, welche burch ben Anfangspunkt ber Coordinaten A gebet, c und folglich auch D = o ift, daß ferner,

wenn Ax + By + Cz + D = 0, Ax + By + Cz + D' = 0, die Gleichungen für zwen parallele Senen senn sollen, A' = A, B' = B, and C' = C senn muß.

Dritt. 3 uf. Will man die Gleichungen für die Schnite te dieser Sbene mit den koordinisten Sbenen haben; so darf man nur nach und nach $x=\infty, y=0, z=0$ sepen. Man erhälf alsdann für den Schnitt der Sbene mit der Sbene der y und z die Gleichung By + Cz+ D=0; für den Schnitt mit der Sbene der x und z, die Gleichung Ax+ Cz+ D=0, und für den Schnitt mit der Sbene der x und y, die Sleic hung Ax+ By + D=0.

Biett. Just. Man tann sich die Genen BAC, BAD, CAD, (Fig. 122) nach allen Seiten ohne Ende erweitert denten; es entstehen alsdann um den Puntt A herum acht körperliche Winkel, welche den Raum in eben so viele Gegenden atsheiten, in denen die x, y, z, genommen werden können. Sind uchmit ich in dem körperlichen Binkel, welcher von den ebenen Winkeln BAC, BAD, CAD eingeschlossen wird, die x, y, z, powsitiv, so sind in den übrigen sieben, eine oder zwen von ihnen, oder auch alle dren negativ. Es liegt nämlich

+ x, + y, - z, im Wintet BAC, CAd, BAd, + x, - y, + z, im Wintet BAC, CAD, DAB, - x, + y, + z, im Wintet BAC, CAD, bAD, + x, - y, - z, im Wintet BAC, CAD, BAD, - x, - y, + z, im Wintet bAC, CAD, bAD, - x, + y, - z, im Wintet bAC, CAd, bAd, - z) - y, - z, im Wintet bAC, CAd, bAd.

\$ 239.

Mufg. Es find die Gleichungen zwever Ebenen ge-

geben : man foll bie Gleichungen für die Projetischen ibe res Schnittes auf die drey Toordinieten Wengu. finden.

Muft. Es fegen

Ax + By + Cz, + D = 0, A'x + B'y + C'a + D' = 0, Die Steichungen ber benden gegebenen Sbenen, beren, Schnitt gesucht wird.

- a) Alle Pankte des Schnittes find berden Senen gameins schaftlich. Es muffen daber die Lopedinaten des Schnistes ein solches Perhaltnis gegen einander haben, das dadurch den benge den gegebenen Gleichungen zu gleicher Zeit ein Genüge ges schiebet. Es können daher nicht, wie ben einer Sene, zwen der Größen x, y, z, wilkführlich angenommen warden, um daraus die dritte zu erhalten; denn sobald eine derselben bez kimmt ift, so sind es vermöge hieser Gleichungen auch die berden anderen. Jede zwen von den dreven Coordinaten des Schnittes haben demnach eine bestimmte Relation, wofür sich eine Gleichung sinden lassen muß; und diese Gleichung kann keine Gleichung sinden lassen projektion auf die Steine dieser zwen Coordinaten sebn.
- 2) Wenn man aus den berden gegebenen Gfeichungen nach und nach z, y, x eliminirt, so erhalt man bie folgenden;

$$(A'C - AC') \times + (B'C - BC') y + CD' - C'D = 0,$$

 $(BC' - B'C) z + (A'B - AB') \times + BD' - B'D = 0,$
 $(AB' - A'B) y + (AC' - A'C) z + AD' - A'D = 0.$

oder, wenn man zur Abkürzung A'C — AC' = α , BC' — B'C = β , AB' — A'B = γ , CD' — C'D = δ , BD' — B'D = ϵ , AD' — A'D = ξ fest,

$$\alpha x - \beta y + \delta = 0,$$

 $\beta x - \gamma x + \epsilon = 0,$
 $\gamma y - \alpha x + \xi = 0.$

Muft. Es fenen

$$y = ax + b$$
, $y = a'x + b'$

Die Bleichungen ber benben geraden Linien, beren Durche fconittspuntt gefucht wird.

Da der Durchschnittspunkt ben benden Linien, gemeinschaft lich ift; so muffen fich fur x,'y, solche Werthe finden Laffen, welche ben benden Gleichungen zu gleicher Zeit ein Genüge thun. Bezeichnet man daber die Coordinaten des gesuchten Punktes durch x'; y'; so muß fur diesen Punkt x = x', und y = y' sennt. Man erhalt also aus den obigen Gleichungen die solgenden:

$$y' = ax' + b$$
, $y' = a'x' + b'$

und biefe geben, mit einander verbunden,

$$x' = -\frac{b'-b}{a'-a}$$
, $y' = \frac{a'b-ab'}{a'-a'}$.

§ 233.

Aufg. Eine Linie PQ (Fig. 110) foll durch zwey, vers mittelst ihrer Coordinaten gegebenen Punkte M', M", ger ben: man foll die Gleichung dieser Linie, den Winkel, um ter welchem sie die Abscissenlinie schneidet, wie auch die Lange des, zwischen den Punkten M' M", liegenden Stur Ees M'M" finden.

- Aufl. Es sepen x', y', die gegebenen Coordinaten des Punttes M' und x', y", die ebenfalls gegebenen Coordinaten des Punttes M". Es sen ferner y = ax + b die gesuchte Gleichung der Linie PQ, in welcher die Größen a, b, für jest unvefannt sind.
- 1) Da die Puntte M', M", in der Linie PQ liegen; fo muß die angenommene Gleichung fur bende Puntte flatt fine ben tonnen; d. h. fie muß wahr werden, wenn man fowohl

me, y', ale m'im', fur my y fabittuire. Diese Substinetonen geben aber,

$$y' = ax' + b$$
, $y'' = ax'' + b$.

Man hat also awen Gleichungen awischen den unbefannten Großen a, b, und den befannten x', y', x", y"; es laffen fich also die erfteren aus den letteren bestimmen. Durch die Auf, tosung bieser Gleichungen erhalt man,

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}, b = \frac{x''y' - x'y''}{x'' + x'}.$$

Die gesuchte Gleidung ift bemnach ::

$$y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} x + \frac{x''y' - x'y''}{x'' - x'}$$

2) Es sen a ber Mintel, unter welchem die Linie PQ die Abscissenlinte schneibet; alsdann ift (§ 232) Tang. a = a.

Nach 1 ift aber $a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$; man hat also,

Tang.
$$\alpha = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$
.

Dieses batte man auch unmittelbar aus der Figur selbst finden können; denn ziehet man die Linie M'pider AB parallel, so find die Wintel M'M'p, QCB, einander gleich; man hat also

Tang.
$$\alpha = \text{Tang. M''M'p} = \frac{M''p}{M'p} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$
.

5) Do M'M" = $V [(M'p)^2 + (M''p)^2]$, und M'p = x'' - x', M''p = y'' - y'; fo iff, $M'M'' = V [(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2].$

\$ 234

Anfg. Die Gleichungen für zwey gerade Linien find 11 a gegeben! man foll ben Wintel finden, unter welchen fie fich fichneiben.

Aufl. Es fenen y = ax + b, y' = a'x + b', die gegebenen Gleichungen ber Linten PQ, P'Q' (Jig. 111); die Binfel QXB, Q'X'B, unter welchen fie die Abfeiffenlinie schneiben, bezeichne man durch a, a', und den Bintel PMP', unter welchen fic bie Linten felbst schneiben, durch p.

Dies vorausgeseht, hat man nach § 231, Tang. $\alpha = a$; Tang. $\alpha' = a'$. Es ift aber $\varphi = \alpha' - \alpha$; man hat also,

Tang.
$$\varphi = \frac{\text{Tang. } \alpha' - \text{Tang. } \alpha}{1 + \text{Tang. } \alpha' \text{ Tang. } \alpha} = \frac{a' - a}{1 + a'}$$

Er ft. 3u f. Sollen sich demnach die benden Linien unter rechten Winteln schneiben; so muß $\varphi=90^\circ$ sepn. In die sem Kalle ist aber Tang. $\varphi=\infty$; es muß demnach der Nenn per des sur Tang. φ gesundenen Ausdruckes =0 sepn. Man hat also 1+a/a=0; waraus man $a'=-\frac{1}{a}$ erhalt. Hier aus folgt, daß wenn die Linien P'Q', PQ auf einander perpendikular stehen sollen, ihre Steichungen nothwendig die solgende Form haben mussen:

$$y = ax + b$$
, $y = -\frac{1}{a}x + b$.

3 we pt. Zu s. Sollen aber die benden Linien einander parallel fenn; so muß φ , folglich auch Tang. $\varphi = 0$ senn. Wan hat also $\frac{a'-a}{1+a'a} = 0$; woraus man a'=a erhalt. Die Gleichungen für parallele Linien muffen demnach die folgende Form haben,

$$y = ax + b$$
, $y \neq ax + b$.

Man batte diefes Resultat auch unmittelbar daraus berleiten

Aufg. Die Gleichung einer geraden Linie ift geger ben: man foll die Gleichung einer anderen finden, web the jene unter einem gegebenen Wintel ichneider, und burch einen gegebenen Punkt geber.

Ruft Die Coordinaten des gegebenen Pintes fenen x', y'; die Edngente des gegebenen Wintels fen = t; die Gleichung der gegebenen Linie y = ax + b; die Gleichung der gefuchten Linie y = a'x + b'. Es muffen nun a' und b' aus den gegebenen Bedingungen bestimmt werden.

1) Nach der Aufl. des vor, S's ift $x = \frac{a}{x + a'a}$. Hiers aus erbalt man,

$$a' = \frac{t+a}{1-\lambda t}$$

2) Da die gesuchte Linie durch ben Punkt geben soll, bessen Coordinaten x', y', find; so hat man y' = a'x' + b'; woraus man b' = y' - a'x' erhalt. Wird dieser Werth in det Sleichung y = a'x + b' substituirt; so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende?

$$y = a'x + y' - a'x',$$

oder

$$y - y' = a' (x - x').$$

. 5) Bird hierin für a' fein Werth aus a fubstituirt; fo

$$y-y'=\frac{t+a}{t-at}(x-x');$$

und dies ift die Gleichung fur die gesuchte Linic.

1 4 36.° \$1 256.°

Unfg. Die Gleichung für eine gerade Linie ift geger ben; auch find die Coordinaten eines Dunktes gegeben; man soll die Gleichung für das Perpendikel finden, welc des aus diesem Punkte auf jene Linie herabgelaffen wird, wie auch die Lange dieses Perpendikels.

Aufl. 2) Um die Gleichung des Perpenditels zu finden, barf man nur in der Gleichung in 3 des vorigen S's E-Tang. 90° = 00-fegen; hierdurch nermandelt fie fich in

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$$

2. 2) Es sepen nun x", y", die unbefannten Coordinaten bes Durchschnittspunktes; aledonn hat man für diesen Punkt die benden Gleichungen,

$$y'' - y' = -\frac{1}{a}(x'' - x')$$

 $y'' = ax^{i} + b;$

und diefe geben,

$$x'' = \frac{ay^6 + x' - ab}{1 + a^2}, y'' = \frac{a^2y' + ax' + b}{1 + a^2};$$

alfo,

$$x''-x'=\frac{a(y'-ax'-b)}{1+a^2}, y''-y'=-\frac{y'-ax'-b}{1+a^2}.$$

3) Nach § 233. 3 ift, wenn I die Lange der, awischen dem gegebenen und dem Durchschnittspunkte enthaltenen Linie, dat heißt, die Lange des gesuchten Verpenditels bezeichnet, $1 = V [(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2]$. Werden hierin die Werthe von x'' - x', y'' - y' aus 2 substituirt; so erhalts man,

$$1 = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{(1 + a^2)}}$$

So wie die geraden Linien, fo laffen fic auch die Chenen und ihre Schnitte burch Gleichungen angeben, und zwar auf bie folgende Art.

Es wurde icon in § 2 gezeigt, bag bie Lage eines Punttes im Raume durch feine befannten Entfernungen von bren der Lage nach gegebenen Cbenen beftimmt mird. Da es nun gleichguttig ift, welche Lage biefe Cbenen haben mogen, fo tann man fie, ber leichteren Behandlung wegen, auf einanber perpenditular annehmen. Es fenen daber BAC, BAD, CAD (Sig. 112) bren auf einander perpendituldre Ebenen; AB, AC, AD, ihre Schnitte. Man nehme nun irgend einen Bunte M an, und proficire ibn in p, p', p", auf die dren ermabnten Cbenen; fo find Mp, Mp', Mp", die Abftande biefes Punttes von den respettiven Ebenen BAC, BAD, CAD. Rennes man baber Diefe Abftanbe, fo tennet man auch die Lage des Punttes. Werden die Linien p'm, phm", bet Mp, die Linien pm, p"m', der Mp', und die Linien pm", p'm', der Mp" parallel gezogen; so ift Mp" = p'm' = Am, und Mp' = mp. Der Puntt M ift demnach auch gegeben, wenn die dren Linien Am, mp, pM, gegeben find.

Die Linien Am, mp, pM, heißen die Coordinaten des' Punktes M; sie sollen, so lange sie auf keinen bestimmten Punkt bezogen werden, durch x, y, z, bezeichnet werden; nams lich Am = x, mp = y, pM = z. Die Sbenen BAC; I BAD, CAD, heißen die koordinisten Sbenen, und die Livinien AB, AC, AD, die koordinisten Azen; die ersteren sollen in der Ordnung, wie sie hier genannt worden, die Sbenen der x, y, der x, z, und der y, z, die legteren die Azen der x, der y und der z heißen.

Die Linien Am (= x), mp (= y), tonnen auch als

die Coordinaten des Antites p angeschen werden, und eben so, die Leuen Am" (=y), m"p" (=z), als die Coordinaten des Vontres p", not Am' (=z), m'p' (=x) als die Coordinaten des Vortres p'. Ans diesem Geschappunkte betrachtet, kann man auch sagen, der Pault M werde bestimmt, durch seinen Abstand von irgend einer der drep Ebenen, und durch die Coordinaten seiner Projektion auf diese Ebene.

Liegt der Punkt M im der Stene BAC, so ift z=0; liegt er in der Gene BAD, so ist y=0: liegt er in der Stene CAD, so ist x=0. Har einen Punkt auf der Are AB ist so wohl y als z=0; sur einen Punkt auf der Are AC ist x and z=0; sur einen Punkt auf der Are AD ist x and y=0.

\$ 238.

Aufg. Die Gleichung einer Stene gu finden.

- Aufl. Es senen wieder, wie in Fig. 112, ABC, BAD, CAD (Fig. 113), die toordinirten Senen: AB, AC, AD, die toordinirten Aren; und es werde juerft die Gleichung einer Ebene HAK gesucht, von welcher angenommen wird, daß sie burch den Puntt A gehe. Es seyen AH, AK, die Schnitte bieser Ebene mit den Ebenen DAC, BAD.
- 2) Es sen M ein Punkt der Sbene HAK; Am, mp, pM, die Coordinaten dieses Punktes; also Am = x, mp = y, pM = z. Man siehe pm" der AB, und m"h, mk, der pM parallel, sie schneiden die Linien AH, AK, in h, k; mache bierauf pl = mk, und siehe m"l, kl. Wird ferner Mh ger sogen, so flud die Linien Mh, AK, als Schnitte zwener parallelen Ebenen Mhm"l, KAB, durch eine dritte HAK, eigander parallele.
- 2) Da pl ber mk gleich und parallel ift; fo find die Lis nien mp, kl, mithin auch Am" gleich und parallel; also ift

such m''l der Ak, und daher auch ber Mh parallel; folglich ift Mhm''l ein Parallelogramm, und daher Ml = hm''.

- 3) Die Wintel HAC, KAB, bleiben für alle Puntte ber Ebene HAK bieselben; man kann sie daher als gegeben auser, hen, also auch ihre Langensen. Man sehe Tang. KAB = a, Tang. HAC = b; aledann ist in dem ben m rechtwinkeligen Drepede Amk, mk = Am. Tang. KAB = ax, und in dem ben m" rechtwinkeligen Prepede hAm", hm" = Am" Tang. HAC = mp. Tang. HAC = by.
 - 4) Hieraus erholt man nun Mp = MI + lp= hm" + mk = ax + by. Es ift aber Mp = z; also z = ax + by; und bies ist die Steichung einer Ebene, welche durch den Punkt A gehet.
 - 5) Sehet die Ebene, deren Gleichung gesucht wird, nicht burch ben Punkt A, wie etwa die Ebene PQR; so kann man sich boch immer dutch A eine Sene der vorigen parallel ges legt benten, und für diese gilt die Gleichung 2 = ax + by. Run ift aber jedes z für die Sbene PQR um das Stud AQ größer als für die Sbene HAK; sest man demnach AQ = c; so ift die Gleichung für jede Ebene,

$$z = ax + by + c$$

Erft- Bu f. Um diefer Gleichung eine regelmäßigere Ge falt zu geben, multiplicire man fie mit irgend einer Große C, und fese hierauf — aC = A, — bC = B, — cC = D; hiers burch verwandelt fle fich in die folgende:

$$Ax + By + Cz + D = \alpha$$

3ment. Buf. Aus ber Art, wie bie Steichung Ax + By + Cz + D = o gefanden worden, erhellet angleich, bag für jede Sene, welche burch ben Anfangspunkt ber Coordinaten A gehet, c und folglich auch D = o ift, bag ferner,

wenn Ax + By + Cz + D = 0, A!x + B'y + C'z + D' = 0, die Gleichungen für zwen parallele Ebenen senn sollen, $A' = A_{\ell}$, $B' = B_{\ell}$ und C' = C senn muß.

Dritt. 3 us. Will man die Gleichungen für die Schnitte dieser Sbene mit den koordinisten Sbenen haben; so darf man nur nach und nach x=10, y=0, z=0 sepen. Man erhält alsdann für den Schnitt der Sbene mit der Sbene der y und z die Gleichung By + Cz+ D=0; für den Schnitt mit der Sbene der x und z, die Gleichung Ax + Cz+ D=0, und für den Schnitt mit der Sbene der x und y, die Sleichung Ax + By + D=0.

Viert. Bu f. Man tann fich die Ebenen BAC, BAD, CAD, (Fig. 112) nach allen Seiten ohne Ende erweitert denten; et entstehen alsdum um den Punte A herum acht torperliche Wintel, welche den Raum in eben so viele Gegenden atreeilen, in denen die x, y, z, genommen werden tonnen. Sind udmilich in dem forperlichen Binkel, welcher von den ebenen Bink teln BAC, BAD, CAD eingeschlossen wird, die x, y, z, possifico-so sind in den übrigen sieben eine oder zwen von ihnen, oder auch alle dren negativ. Es liegt nämlich

+ x, + y, - z, im Wintet BAC, CAd, BAd, + x, - y, + z, im Wintet BAC, cAd, DAB, - x, + y, + z, im Wintet bAC, CAD, bAD, + x, - y, - z, im Wintet BAO, cAd, BAd, - x, - y, + z, im Wintet bAC, cAD, bAD, - x, + y, - z, im Wintet bAC, CAd, bAd, - x, - y, - z, im Wintet bAC, cAd, bAd.

\$ 239

Mufg. Es find die Gleichungen zweyer Ebenen go

geben : man foll die Gleichtegen, für die Projektichen ih. res Schnittes auf die dren koordinirten Wegen, finden.

...

Muft. Es fenen

Ax + By + Cz, + D = 0, A'x + B'y + C'a + D' = 0, die Gleichungen ber bemben gegebenen Chonen, beren, Schnift.

- a) Mie Punke des Schnittes find berden. Seinen gameinfchaftigt. Es muffen daber die Caproniaten des Schnictes ein
 foldes Perhältniß gegen einander haben, das dadurch den bengben gegebenen Meichungen zu gleicher Zeit ein Genüge ges
 schiebet. Es komen daher nicht, wie ben einer Sene, zwen
 der Grösen x, y, z, willtührlich angenommen werden, um
 daraus die dritte in erhalten; denn sobald eine dersetben bes
 kimme ift, so sind es vermöge dieser Gleichungen auch die
 kenden anderen. Jede zwen von den drenen Coordinaten des
 Schnittes haben demnach eine bestimmte Relation, wofür sich
 eine Sleichung sinden lassen muß; und diese Gleichung kann
 keine andere, als die ihrer Projektion auf die Sbene dieser zwen
 Coordinaten sebn.
- 2) Wenn man aus den bepben gegebenen Gfeichungen nach und nach z, y, x eliminirt, so erhalt man die folgenden:

$$(A'C - AC') \times + (B'C - BC') \times + CD' - C'D = 0,$$

 $(BC' - B'C) \times + (A'B - AB') \times + BD' - B'D = 0,$
 $(AB' - A'B) \times + (AC' - A'C) \times + AD' - A'D = 0.$

oder, wenn man zur Abkürzung $A'C - AC' = \alpha$, BC' - B'C= β , $AB' - A'B = \gamma$, $CD' - C'D = \delta$, $BD' - B'D = \epsilon$, $AD' - A'D = \xi$ fest,

$$\alpha x - \beta y + \delta = 0$$
,
 $\beta x - \gamma x + \epsilon = 0$,
 $\gamma y - \alpha z + \zeta = 0$.

und dies find die Gleichungen für Die respektiven Projektionen bes Schnittes auf die dren koordiniteten Chenen.

Suf. Nach \S 5 ift eine Linie gegeben, wenn die Projektionen dersetben auf zwen Seenen von bekannter Lage gegeben sind; es reichen demnach schon wer Projektionen zur Bestimmung des Schnittes hin. Da wir nun dier Gleichungen für dren Projektionen gesunden haben; so müsen jede zwer dersetz den die dritte in sich schließen, und diese muß sich daher aus jenen herleiten lassen. Um sich hiervon zu überzeugen, darf man nur eine der veränderlichen Gedsen, etwa x, eliminiren. Man erhält, alsdamn aus der ersten und zwenten Gleichung, aßz — β yy $+\alpha$ z + $\gamma\delta$ = 0, und aus der britten durch die Musiehplisation mil — β , $\alpha\beta$ z — β -y — β z = 0; diese benden Gleichungen müsen demnach identisch sen; es muß sotzstick α 1+ γ 6 = — β 2; oder α e + γ 6 + β 2=0 sens; und dies ist auch wirklich richtig, wie sich ergiebt, wenn sur α 3, β 4, γ 5, γ 6, ihre Werthe gescht werden.

§ 240.

Aufg. Es find drev Dunkte vermittelft ihrer Coor. Sinaten gegeben: man foll die Gleichung fur die Ebene finden, welche burch fie gelegt werden bann.

Aufl. Es sepen x', y', x', x'', y'', z'', x''', y''', x''', p''', x''', p''', x''', p''', x''', y''', x''', y''', x''', y''', x''', y''', x''', y''', x''', x'', x''', x

Da die dren gegebenen Puntte in diefer Ebene liegen fole ten, fo muffen die folgenden brev Gleichungen ftatt haben:

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

 $Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0,$
 $Ax''' + By''' + Cz''' + D = 0,$

Man bivibire biefe Gleichungen burch D, und betrachte $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, als die unbekannten Großen berfelben. Durch bie Auflösung erhalt man alsbann

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{D}} =$$

$$\frac{z'(y''-y'')-z''(y'-y''')+z'''(y'-y'')}{z'(y'z'''-y'''z'')-x'''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')}$$

$$\frac{B}{D} =$$

$$\frac{x'(z''-z''')-x''(z'-z'')+x'''(z'-z'')}{x'(y'z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')}$$

$$\frac{c}{b} =$$

$$y!(x''-x''')-y''(x'-x''')+y'''(x'-x'')$$

$$x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')$$

Da es hier bloß auf die Berhaltniffe ber Großen A, B, C, D, und nicht auf ihre wirkliche Große antommt; fo tann man gur Bermeibung ber Bruche fegen,

$$A = z'(y'' - y''') - z''(y' - y''') + z'''(y' - y'')$$

$$B = x'(z'' - z''') + x''(z' - z'') + x'''(z' - z'')$$

$$C = y'(x'' - x''') - y''(x' - x''') + y'''(x' - x'')$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{x}'(\mathbf{y}''\mathbf{z}''' - \mathbf{y}'''\mathbf{z}'') - \mathbf{x}''(\mathbf{y}'\mathbf{z}''' - \mathbf{y}''\mathbf{z}') + \mathbf{x}'''(\mathbf{y}'\mathbf{z}'' - \mathbf{y}''\mathbf{z}')$$

Werden diese Werthe in der Gleichung Ax + By + Cz + D = 0 substituirt, so erhalt man die gesuchte Gleichung der Ebene.

Aufg. Die Gleichungen für die Projektionen zwever Linten auf zwey der koordinirten Chenen find gegeben; man foll die Bedingungen angeben, unter welchen fich

biefe Linien ichneiben, und ben Die, wo fie fich ionei ben, wenn Diefe Bedingungen ftatt finden.

Auf (. 1) Es fenen

$$x = az + b$$
, $x = a'z + b'$

die Gleichungen fur die Projektionen der zwen Linien auf die Ebene der x, z, und

bie Gleichungen fur die Projektionen auf die Ebene der y, z.

2) Giebt es nun einen Puntt, wo fic bie Linien foneis den, und bezeichnet man die Coordinaten diefes Punttes durch x', y', z'; fo muffen fur benfelben bie folgenben vier Gleis dungen au gleicher Zeit fatt haben:

$$x' = az' + b$$
, $x' = a'z' + b'$
 $y' = cz' + d$, $y' = c'z' + d'$;
foldernous:

alfo auch bie folgenden:

$$az' + b = a'z' + b'$$

$$cz' + d = a'z' + b'$$

cz'+d=c'z'+d'.3) Soll es baber einen Durdfonittepunft geben, fo mus fen die hieraus für z' gezogenen Werthe einander gleich fenn.

Man hat daher die Bedingungsgleichung,
$$\frac{b'-b}{a'-a} = \frac{d'-d}{c'-c}$$

$$(a'-a)(d'-d) = (b'-b)(c'-c)$$

4) Findet die angegebene Bestehung swifden ben Groben a, b, c, d, a', b', c', d' fatt, fo giebt es einen Durchichnitts. puntt, und feine Coordinaten find,

$$z' = \frac{b' - b}{a - a'} \cdot \frac{d' - d}{c - c'}$$
 $y' = cz' + d = c'z' + d'$
 $x' = az' + b = a'z' + b'$

Unfg. Die Gleichung einer Ebene ift gegeben: man foll die Bleichung einer anderen Ebene finden, welche jes ner parallel ift, und durch einen gegebenen Punft gehet.

Aufl. Es sen Ax + By + Cz + D = 0 die Gleichung ber gegebenen Sbene; so kann die Gleichung der gesuchten Sbene keine andere Form als diese haben: Ax + By + Cz + D' = 0 (5 238 3uf. 2); worin weiter nichts als das Glied D' unbekannt if.

Es senen x', y', z', die Coordinaten des gegebenen Punt. tes. Da dieser Puntt in der gesuchten Seene liegen soll, so hat man die Gleichung Ax' + By' + Bz' + D' = 0. Wird diese Gleichung von der angenommenen abgezogen, so err batt man,

A (x - x') + B (y - y') + C (z - z') = 0;und dies ift die Gleichung der gesuchten Sbene.

§ 243.

Aufg. Es ift eine gerade Linie gegeben: man foll durch einen gegebenen Puntt eine Bbene legen, welche auf dieser Linie perpenditular ftebet.

Anfl. In § 20 wurde gezeigt, daß wenn eine Linie auf einer Chene perpendituldr fieben foll, ihre Projectionen ebenfalls perpendituldr auf ben Schnitten der Sbene mit ben Projectionsebenen fenn muffen. hierauf grundet fich die folgende Auflöfung.

1) Ce fen Ax + By + Cz + D = 0 die Gleichung ber gesuchten Chene. Nach § 238 Bus. 3 find alsbann die Gleichungen fur die Schnitte bieser Stene mit den Sbenen ber x, und ber y, z,

$$Ax + Cz + D = 0$$
; over $x = -\frac{C}{A}z - \frac{D}{A}$
 $By + Cz + D = 0$, over $y = -\frac{C}{B}z - \frac{D}{B}$

2) Es sepen nun x = az + b, y = a'z + b', die Gleischungen für die Projektionen der gegebenen kinie auf die Ebernen der x, z, und der y, z. Da diese Projektionen auf den Schnitten in z perpendikular stehen mussen; so hat man nach s = s = s = s, s = s = s = s, s = s = s = s. Werden diese Werthe in der Gleichung s = s = s = s = s. Werden diese Werthe in der Gleichung Gleichung

$$C(ax + a'y + z) + D = 0$$
, oder $ax + a'y + z + \frac{D}{C} = 0$.

5) Da die Sone durch einen gegebenen Punts geben foll; fo fepen x', y', z', die Coordinaten diefes Punttes; man hat alsbann auch

$$ax' + a'y' + z' + \frac{D}{C} = 0.$$

Bird diese Gleichung von der vorigen abgezogen, so erhale man

a
$$(x - x') + a'$$
 $(y - y') + z - z' = 0;$
and dies ift die Gleichung für die gesuchte Sbene.

Buf. If im Gegentheil $Ax + By + Cz + D \rightleftharpoons 0$ die Gleichung einer gegeben en Sbene, und wird die Linie gesucht, welche auf dieser Sbene perpendikular stehet, und durch einen gegebenen Punkt gehet, so darf man nur far a, a', ihre Werthe $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, aus 2 in den Gleichungen $y \rightleftharpoons az + b$, $y \rightleftharpoons a'z + b'$ substituiren. Man erhalt hierdurch die Gleichungen

$$x = \frac{A}{C}z + b$$
, $y = \frac{B}{C}z + b'$.

Da nun auch das Poependikel durch einen gegebenen Punkt geben foll, deffen Coordinaten x', y', at, fepn mogen; so hat man.

$$x' = \frac{A}{C}z' + b, y' = \frac{B}{C}z' + b'.$$

Berben biefe Bleichungen von ben porigen abgezogen, fo verr'

$$x-x'=\frac{A}{C}(z-x'), y-y'=\frac{B}{C}(z-z');$$

Dies find alfo die Bleichungen für Die Projektionen des Perpendikels.

\$ 244.

Mufy. Es find zwes Puntre vermittelft ihrer Coor, binaten gegeben: man foll ihren Abstand finden.

Aufl. Es feinen M, M', (Fig. 114), die benden Punkte; Am, mp, pM oder x', y, z die Coordinaten des erften, Am', m'p', p'M' oder x', y', z', die Coordinaten des zwenten; es foll MM' acfunden werden.

Man siehe py der Are AB parallet, ferner die Linie pp', und Mr ihr parallet. Albann ift in dem ben q recheminsettigen Drenecke pap', $(pp')^2 = (pq)^2 + (qp')^2$, oder, da pq—Am'—Am = x' — x, qp' = m'p'— mp = y' — y ift, $(pp')^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2$. In dem ben r recheming letigen Organice MrM' ift ferner $(MM')^2 = (Mx)^2 + (M'x)^2$, where, da $(Mx)^2 = (pp')^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2$, M'r = M'p' = Mp = x' - x, also $(M'x)^2 = (x'-x)^2$ ift, $(MM')^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (x'-x)^2$, and daher $(M')^2 = (x'-x)^2 + (x'-x)^2 + (x'-x)^2$; Geometric M.

ober auch, da $(x'-x)^2 = (x-x')^2$ ic.

$$MM' = V[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2].$$

Buf. Fallt ber Puntt M' in A, fo ift x' = 0, y' = 0, x' = 0, und man erhalt den Abstand MA des Puntes M pom Anfangspuntte der Coordinaten; es ift namlich

$$AM = V (x^2 + y^2 + x^2)$$

§ 245.

Aufg. Es find zwey Puntte bermierelft ihrer recht winteligen Coordinaten gegeben: man foll ben Winkel finden, welchen zwey aus dem Anfangehunkte der Coordinaten durch diefe Puntte gezogenen Linien einschließen.

Aufl. Man bente fich in Fig. 224 bie Emien AM, AM', durch die gegebenen Buntte M, M', gezogen; es foll alsbann ber Wintel MAM' gefunden werden.

Es sepen x, y, z, die Coordinaten des Punttes M, und x^p , y', z', die Coordinaten des Punttes M'. Rach dem vor. x^p , y', z', die Coordinaten des Punttes M'. Rach dem vor. x^p , y', z', z',

Cos. MAM' =
$$\frac{(AM)^2 + (AM')^2 - (MM')^3}{2 AM \cdot AM'}$$
;

werben daber in diesem Ausdrude für die Linien AM, AM', MM', ihre Werthe substituirt, so erhalt man (p)

Cos. MAM' =
$$\frac{xx' + yy' + zz'}{V(x^2 + y^2 + z') \cdot V \cdot x'^2 + y'^2 + z'^2)}$$

Erft. Buf. Die Linie AM macht mit ben bren Aren bie Bintel MAB, MAC, MAD, welche nach ber Ordnung, wie fie bier genannt worden, durch a, B, y, bezeichnet werden sollen. Um diese Bintel zu finden, ftelle man fich vor; der Puntt Me werde querft in die Are AB, hierauf in die Are

AC, und endlich in die Are AD versett. Sen der ersten die ser Bersegungen wird y' = 0, a' = 0, and der Winkel MAM' gehet in MAB = a über; ben der zweiten wird a' = 0, z' = 0, und ber Winkel MAM' gehet in MAC = 3 über; ben der britten Versegung endlich wird x' = 0, y' = 0, und der Winkel MAM' gehet in MAD = y über. Durch diese dreperlen Substitutionen erhält man aus dem vorhin für Cos. MAM' gefundenen Ausdrucke,

Gos.
$$\alpha = \frac{x}{V(x^2 + y^2 + z^2)}$$
, Cos. $\beta = \frac{y}{V(x^2 + y^2 + z^2)}$.

Cos. $\gamma = \frac{z}{V(x^2 + y^2 + z^2)}$.

Bermittelft dieset Andrade laffen fich atso die Wintel finden, welche eine Linie, aus dem Ansangspunkte der Coordinaten durch einen gegebenen Punkt gezogen, mit den drep Aren bildet.

3went Just Quabrirt man Diese Gleichungen und abe biret fie hierauf gusammen ; so erhalt man:

Cos.
$$\alpha^2$$
 + Cos. β^2 + Cos. γ^2 = 1;

b, h. die Summe der Quedrate von den Cofinussen der Bins tel, welche vine aus dem Ansangspunkte der Coordinaten ger zogene Linfe mit den dren Axen bildet, ist immer der Einheit gleich.

Dritt Buf. Begeichnen die Buchftaben al, B', p', die Bintel, welche die Linie AM' mit den dron Kren AB, AC, AD, macht; so hat man auch nach bem Borbergebenden,

Cos,
$$\alpha' = \frac{x'}{V(x'^{2} + y'^{2} + z'^{2})}$$
, Cos. $\beta' = \frac{y'}{V^{2}(x'^{2} + y'^{2} + z'^{2})}$
Cos. $\gamma' = \frac{x'}{V(x'^{2} + y'^{2} + z'^{2})}$

wenn Ax + By + Cz + D = 0, Ax + B'y + C'z + D' = 0, die Gleichungen für zwen parallele Soenen senn sollen, $A' = A_x$, B' = B, and C' = C senn muß.

Dritt. Zus. Will man die Gleichungen für die Schnite te dieser Sbene mit den koordinisten Sbenen haben; so darf man nur nach und nach x=10, y=0, z=0 sepen. Man erhält alsdann für den Schnitt der Sbene mit der Sbene der y und z die Gleichung By + Cz + D=0; für den Schnitt mit der Sbene der x und z, die Gleichung Ax + Cz + D=0, und für den Schnitt mit der Sbene der x und y, die Sleichung Ax + By + D=0.

Biett. Bu f. Man kann fich die Genent BAC, BAD, CAD, (Fig. 112) nach allen Seiten ohne Ende erweitert denken; et entstehen alsdam um dem Punkt A herum acht körperliche Winkel, welche den Raum in eben so viele Gegenden absheiten, in denen die x, y, z, genommen werden können. Sind nach lich in dem körperlichen Winkel, welcher von den ebenen Wink keln BAC, BAD, CAD eingeschlossen wird, die x, y, z, possisch- so find in den übrigen sieben, eine oder zwen von ihnen, oder auch alle dren negativ. Es liegt namlich

+ x, + y, - z, im Wintet BAC, CAd, BAd, + x, - y, + z, im Wintet BAC, cAd, DAB, - x, + y, + z, im Wintet BAC, CAD, bAD, x, - y, - z, im Wintet BAC, cAd, BAd, - x, - y, + z, im Wintet bAC, cAD, bAD, - x, + y, - z, im Wintet bAC, cAd, bAd, - x) - y, - z, im Wintet bAC, cAd, bAd.

\$ 239.

Mufg. Es find bie Gleichungen zwever Sbenen go

geben : manifell die Gleichungen, für die Projektionen ibe res Schnittes auf die dren koordinirten Wegen, finden,

... 4.

Muft. Es fegen

Ax + By + Cz + D = 0, A'x + B'y + C'a + D' = 0, bie Gleichungen ber bemben gegebenen Chenen, beren, Schnitt.

- a) Mie Panke des Schnittes find benden Seenen gameinichafstich. Es muffen daber die Laprdinaten des Schnictes ein
 foldes Perhältniß gegen einander haben, daß dadurch den bewe den gegebenen Meichungen zu gleicher Zeit ein Genüge ges
 schiebet. Es konnen daher nicht, wie ben einer Sene, zwen
 der Größen x, y, z, willtührlich angenommen werden, um
 daraus die dritte zu erhalten; denn sobald eine dersetben bes
 kimmt ift, so sind es vermöge hieser Gleichungen auch die
 kenden anderen. Jede zwen von den drepen Coordinaten des
 Schnittes haben demnach eine bestimmte Relation, wofür sich
 eine Gleichung sinden lassen muß; und diese Gleichung kann
 keine andere, als die ührer Projektion auf die Stene dieser zwen
 Coordinaten sebn.
- 2) Wenn man aus den benden gegebenen Gleichungen nach und nach z, y, x eliminirt, so erhalt man die folgenden:

$$(A'C - AC') \times + (B'C - BC') y + CD' - C'D = 0,$$

 $(BC' - B'C) z + (A'B - AB') \times + BD' - B'D = 0,$
 $(AB' - A'B) y + (AC' - A'C) z + AD' - A'D = 0.$

oder, wenn man zur Abfürzung A'C — AC' = α , BC' — B'C = β , AB' — A'B = γ , CD' — C'D = δ , BD' — B'D = ϵ , AD' — A'D = ξ fest,

$$\alpha x - \beta y + \delta = 0$$
,
 $\beta x - \gamma x + \epsilon = 0$,
 $\gamma y - \alpha z + \zeta = 0$

und dies find die Gleichungen fan bie respektiven Projektionen bes Schnittes auf die dren koordinisten Chenen.

Suf. Nach \S 5 ift eine Linie gegeben, wenn die Projektionen dersetben auf zwen Sehem von bekannter Lage gegeben sind; es reichen demnach schon zwen Projektionen zur Bestimmung des Schnittes hin. Da wir nun dier Sleichungen säe dren Projektionen gesunden haben; so mässen jede zwen derset, den die dritte in sich schließen, und diese muß sich daber aus jenen herleiten lassen. Um sich hiervon zu überzeugen, darf man nur eine der veränderlichen Gebsen, etwa x, eliminiren. Man erhält, alsdann aus der ersten und zwenten Gleichung, abx — β yy $+\alpha$ s + $\gamma\delta$ = 0, und aus der dritten durch die Musispilisation mil — β , $\alpha\beta$ a — β -y — β 2 = 0; diese benden Gleichungen müssen demnach identisch senn sür es muß sotzlich auch wirklich richtig, wie sich ergiebt, wenn sür α , β , γ , δ , ihre Werthe her selest, wenn sür α , β , γ , δ , ihre Werthe her geschen

§ 240.

Aufg. Es find drev Punkte vermittelft ihrer Coors binaten gegeben: man foll die Gleichung für die Ebene finden, welche burch fie gelegt werden bann.

Aufl. Es fepen x', y', z', x'', y'', z'', x''', x''', y''', z''', bie Coordinaten diefer Puntte. Es fen ferner Ax + By + Cx + D = 0, die gefuchte Sleichung der Ebene; A, B, C, D, find angenommene Größen deren Berhaltniß vermittelft der drep gegebenen Puntte bestimmt werden muß.

Da die dren gegebenen Puntte in diefer Chene liegen fols ten, fo muffen die folgenden bren Gleichungen ftatt haben:

$$Ax' + By' + Cx' + D = 0,$$

 $Ax'' + By'' + Cx'' + D = 0,$
 $Ax''' + By''' + Cx''' + D = 0.$

Man bivibire diese Gleichungen burch D, und betrachte $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, als die unbekannten Größen berselben. Durch die Ausställt man alsbann

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{D}} =$$

$$\frac{z''(y''-y'')-z'''(y'-y''')+z'''(y'-y'')}{z''(y'z'''-y'''z'''-y'''z')+x''''(y'z'''-y''z'')}$$

$$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{D}} =$$

$$\frac{x'(z''-z''')-x''(z'-z'')+x'''(z'-z'')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')}$$

$$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{y! (x''-x''') - y'' (x'-x''') + y''' (x'-x''')}{x' (y'z''-y''z'') - x'' (y'z''-y''z') + x''' (y'z''-y''z')}$$

Da es hier bloß auf die Berhaltniffe ber Großen A, B, C, D, und nicht auf ihre wirkliche Große antommt; fo tamm man gur Bermeibung ber Bruche fegen,

$$A = z'(y'' - y''') - z''(y' - y''') + z'''(y' - y'')$$

$$B = x'(z'' - z''') + x''(z' - z'') + x'''(z' + z'')$$

$$C = y'(x'' - x''') - y''(x' - x''') + y'''(x' - x'')$$

Werden diese Werthe in der Gleichung Ax + By + Cz + D = 0 substituirt, so erhalt man die gesuchte Gleichung der Sbene.

Anfg. Die Gleichungen für die Projektionen zwever Linten auf zwey der koordiniren Chenen find gegeben; man foll die Bedingungen angeben, unter welchen fich

diese Linien schneiden, und ben Gir, wo fie fich'schneis bena wenn diese Bedingungen ftatt finden.

Muft, 1) Es fenen

$$x = az + b$$
, $x = a'z + b'$

die Gleichungen fur die Projektionen der zwen Linien auf die Ebene ber x, z, und

$$y = cz + d$$
, $y = c'z + d'$,

die Gleichungen fur die Projektionen auf die Cbene der y, z.

2) Siebt es nun einen Buntt, wo fic die Linien foneis den, und bezeichnet man die Coordinaten diefes Punttes durch x',-y', 24; fo muffen fur denfelben die folgenden vier Gleis hungen ju gleicher Zeit ftatt haben:

$$x' = az' + b, x' = a'z' + b'$$

 $y' = cz' + d, y' = c'z' + d';$

also auch die folgenden:

$$az' + b = a'z' + b'$$
 $cz' + d = c'z' + d'$

3) Soll es daber einen Durchfchnittspunft geben, fo muße fen die hieraus fur z' gezogenen Werthe einander gleich fenn. Man hat baber die Bedingungegleichung,

$$\frac{b'-b}{a'-a}=\frac{d'-d}{c'-c}$$

ober
$$(a'-a)(d'-d) = (b'-b)(c'-c)$$
.

4) Findet die angegebene Beziehung zwischen den Groben a, b, c, d, a', b', c', d' ftatt, so giebt es einen Durchschnitts punkt, und seine Coordinaten find,

$$z' = \frac{b' - b}{a - a'} = \frac{d' - d}{c - c'}$$

$$y' = cz' + d = c'z' + d'$$

$$z' = az' + b = a'z' + b'$$

Unifg. Die Bleichung einer Ebene ift gegeben: man foll die Bleichung einer anderen Ebene finden, welche je, ner parallel ift, und durch einen gegebenen Punft gehet.

Aufl. Es fen Ax + By + Cz + D = o die Gleichung ber gegebenen Ebene; so kann die Gleichung der gesuchten Ebene keine andere Form als diese haben: Ax + By + Cz + D' = 0 (§ 238 Just 2); worin weiter nichts als das Glied D' unbekannt if.

Es sepen x', y', z', die Coordinaten des gegebenen Puntstes. Da dieser Punkt in der gesuchten Seene liegen foll, so hat man die Gleichung Ax' + By' + Bz' + D' = 0. Wird diese Gleichung von der angenommenen abgezogen, so er. batte man,

A (x - x') + B (y - y') + C (z - z') = 0; and dies ift die Gleichung der gesuchten Stene.

\$ 243.

Aufg. Co ift eine gerade Linie gegeben: man foll durch einen gegebenen Puntt eine Bbene legen, welche auf Dieser Linie perpendikular ftebet.

Aufl. In S 20 wurde gezeigt, bag wenn eine Linie auf einer Chene perpendituldr fteben foll, ihre Projectionen ebenfalls perpendituldr auf ben Schnitten der Bene mit ben Projectionsebenen fenn muffen. hierauf grundet fich die folgende Auflofung.

1) Es fen Ax + By + Cz + D = 0 die Gleichung ber gesuchten Sbene. Rach § 238 Bus. 3 find alsdann die Gleischungen für die Schnitte dieser Sbene mit den Sbenen ber x, und ber y, z,

$$Ax + Cz + D = 0, \text{ over } x = -\frac{C}{A}z - \frac{D}{A}$$

$$By + Cz + D = 0, \text{ over } y = -\frac{C}{B}z - \frac{D}{B}$$

2) Es seven nun x = ax + b, y = a'z + b', die Gleischungen für die Projektionen der gegebenen Linie auf die Ebernen der x, z, und der y, z. Da diese Projektionen auf den Schnitten in z perpendikular stehen mussen; so hat man nach $s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{C}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2$

$$C(ax+a/y+z)+D=0$$
, ober $ax+a/y+z+\frac{D}{C}=0$:

5) Da die Sone durch einen gegebenen Punti geben foll; fo fepen x', y', z', die Coordinaten diefes Punttes; man hat alsbann auch

$$ax' + a'y' + z' + \frac{D}{C} = 0.$$

Wird diefe Sleichung von der vorigen abgezogen, fo erhale man

a
$$(x - x') + a'$$
 $(y - y') + z - z' = 0;$
und dies ift die Gleichung für die gesuchte Sbene.

Buf. If im Gegentheil Ax + By + Cx + D = 0 die Gleichung einer gegeben en Sbene, und wird die Linie gesucht, welche auf dieser Sbene perpendikular fiehet, und dutch einen gegebenen Punft gehet, so darf man nur far a, a', ihre Werthe $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, aus 2 in den Gleichungen y = az + b, y = a'z + b' substituiren. Man erhalt hierdurch die Gleichungen

$$x = \frac{A}{C}z + b$$
, $y = \frac{B}{C}z + b'$.

Da nun auch bas Bespendikel burch einen gegebenen Buntt geben foll, beffen Coordinaten x", y', z', fenn mogen; fo hae

$$x' = \frac{A}{C}z' + b$$
, $y' = \frac{B}{C}z' + b'$.

Berben biefe Bleichungen von ben porigen abgezogen, fo per fdmindet beund b', und man erhalt,

$$x-x'=\frac{A}{C}(z-z'), y-y'=\frac{B}{C}(z-z');$$

dies find also die Gleichungen für die Projektionen des Perpendifels.

244.

Mufg. Es find zwey Dunfte vermittelft ihrer Coor, binaten gegeben: man foll ihren Abstand finden.

Aufl. Es feien M, M', (Rig. 114), die benden Puntte; Am, mp, pM oder x, y, z bie Coordinaten bee erften, Am', m'p', p'M' oder x', y', z', die Coordinaten des gwenten; es foll MM' gefunden werben.

Man giebe py der Ure AB parallel, ferner die Linie pp', und Mr ihr parallet. Alsbain ift in dem ben g rechtminketis gen Drenede pap', (pp')2 = (pq)2 4 (qp')2, ober, ba pq= Am'-Am=x'-x, qp'=m'p'-mp=y'-y if, $(pp')^2 = (x' + x)^2 + (y' + y)^2$. In dem ben r rechtwins letigen Opepate MrM! ift ferner (MM')a. = (Mr)a + (M'x)a, ober, da $(Mv)^2 = (pp!)^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$, M'r = M'p' - Mp = z' - z, also $(M'r)^2 = (z' - z)^2$ if, $(MM')^2$ $= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$, und daher $MM'=Y.[(x'-x)^{\frac{1}{2}}+(y'-y)^{2}+(a'-x)^{2}];$

Beometrie IL

ober auch, da $(x'-x)^2 = (x-x')^2$ ic.

$$MM' = V[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2].$$

Buf. Gant ber Puntt M' in A, fo ift x' = 0, y' = 0, x' = 0, und man erhalt ben Abftand MA des Punttes/M bom Anfangspuntte ber Coordinaten; es ift namlic

$$AM = V (x^2 + y^2 + z^2)$$

\$ 245.

Aufg. Es find zwey Punkte vermietelft ihrer recht winkeligen Coordinaten gegeben; man foll ben Winkel finden, welchen zwey aus dem Anfangspunkte der Coordinaten durch diese Punkte gezogenen Linten einschließen.

Aufl. Man bente fich in Fig. 124 bie Linien AM, AM', burch die gegebenen Bunkte M, M', gezogen; es foll alsbann ber Winkel MAM' gefunden werden.

Es sepen x, y, z, die Coordinaten des Punktes M, und x", y', z', die Coordinaten des Punktes M'. Nach dem vor. S ist alsdann, $(AM)^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $(AM')^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, $(MM')^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-x')^2$. In dem Orepecke MAM' ist aber

Cos. MAM' =
$$\frac{(AM)^2 + (AM')^2 - (MM')^2}{2AM \cdot AM'}$$
;

werden daber in diesem Ansbrude für die Linien AM , AM', MM', ihre Werthe substituirt, so erhalt man (p)

Cos. MAM' =
$$\frac{xx' + yy' + zz'}{V(x^2 + y^2 + z') \cdot V \cdot x'^2 + y'^2 + z'^2)}$$

Erft. Buf. Die Linie AM macht mit ben dren Uren bie Wintel MAB, MAC, MAD, welche nach ber Ordnung, wie fie bier genannt worden, durch a, B, y, bezeichnet werben sollen. Um diese Wintel zu finden, ftelle man fich vor; der Puntt Me werde gnerft in die Are AB, hierauf in die Are

AC, and endlich in die Are AD verfest. Sen der ersten die ser Bersegungen wird y' = 0, n' = 0, and der Winkel MAM' gebet in MAB = a über; ben der zweiten wird n' = 0, z' = 0, und der Winkel MAM' gebet in MAC = 3 über; ben der britten Versegung endtich wird x' = 0, y' = 0, und der Winkel MAM' gebet in MAD = y über. Onrch diese dreperlen Substitutionen erhält man aus dem vorhin für Cos. MAM' gefundenen Ausdrucke,

Gos,
$$\alpha = \frac{x}{V(x^{2} + y^{2} + z^{2})}$$
, Cos. $\beta = \frac{y}{V(x^{2} + y^{2} + z^{2})}$.

Cos. $\gamma = \frac{z}{V(x^{2} + y^{2} + z^{2})}$.

Bermittelft biefet Andrade taffen fich atfo die Wintel finden, welche eine Linie, aus dem Anfangspunkte der Coordinaten durch einen gegebenen Punkt gezogen, mit den drep Aren bildet.

3went. Inf. Quabrirt man Diefe Gleichungen und abe biret fie hierauf gusammen ; fo erhalt man:

Cos.
$$\alpha^2$$
 + Cos. β^2 + Cos. γ^2 = 1;

b. h. die Summe der Quadrate von den Cofinussen der Wins kel, welche eine aus dem Anfangsnunkte der Coordinaten ger zogene Linse mit den dren Aren bildet, ist immer der Einheitgleich.

Dritt. Buf. Begeichnen die Buchflaben al, b', p', die Bintel, welche die Linie AM' mit den dren Wew AB, AC, AD, macht; so hat man auch nach bem Borbergebenben,

Cos,
$$a' = \frac{x'}{V(x'^a + y'^a + z'^a)'}$$
 Cos, $\beta' = \frac{y'}{V(x'^a + y'^a + z'^a)'}$

$$Cos, y' = \frac{x'}{V(x'^a + y'^a + z'^a)}$$

Dieraus und que ben worthe für Con. a, Con. A, Con. y, ges fundenen Ausbeucken woldte man,

Cos. 4 Cos. 4 = 100 (x's + y's + z's) (x's + y's + z's)

Cos, γ Cos, γ' =
\[
\frac{1\(\frac{1}{2}\) \frac{1}{2} \frac{1}{

Die Summe dieser brev Gleichungen giebt mit Bulfe ber Gleich

dung- (190).

Cos. MAM' = Cos. a Cos. a + Cos. B Cos. B' + Cos. y Cos. y.

Rennet man also die Wintel, welche zwen aus dem Anfangsnentes der Coordinaten, gendaene Linien mit den dren Aren mas,

pantes der Coordinaten: geragene Linien mit ben den Aren Minden, fo licht fic auch, vormiefelt, diefer Gleichung der Wintel findens, welchen fie mit einander, machen.

Unmert. Die hier gefundenen Resultate sind in ber höheren Dedanie von der gentren Bifftigfeif; man wird daher wohl thun, fich mit ihren vertraut di machen.

3 g: 246.

im Auffig. Die Weichung einer Ebene ift gegebent auch find die Coordinarenveimes Dunktes gegebent mun foll die Länge des Peopenoftels finden, welches von diesem Punkte auf jene Ebene herabgelaffen wird.

Burft 1) IR Axi+By+ Ca+ P =0 die Gleichung beir gegebenen Bonen und find x', y', z', die Constinaten des gegebenen Bunkten, fo find noch § 243 Bus.

$$x-x'=\frac{A}{C}(z-z')_{z\in \Sigma}-y'=\frac{B}{C}(z-z'),$$

Die Gleichungen fur die Profettion des Berpenditels.

2) Es bezeichnen won nun an m, ly, z, die unbefannten

Spordingten des Dunftes, mo bas Mespenditel bie Sbeng, Riffe and I die Lange, diefes Perpendifels. Pack &, 245, ift, alabann は一下[6年一次)。十年y、一次つま十(3日 1月以7199年」、前8月 1時中 「新 - xt. A. - 2018: spre Warther and Denfittingt webbeit

Es tomme also jest bloß darauf an z - z' gu finden vi . -

3) Der Gleichung Ax + By + Cx 4 D = d iffmiff bie folgende Form geben:

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') + Ax' + By' + Cz' + D$$

Man fubftituire in biefer Gleichung für = -Berthe aus 1, und fuche bierauf z - z'; bice grebt. C (Ax'+ By'+Cz +D) uni

4) Bird biefer Berif von a win bem Ausbrude Bubftituirt, fo erhalt mail,

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{12} \frac{1}{12}$$

und bies ift Die Lange bes gesuchten Perpenditele.

Unmert. Das Beiden - in dem für I gefundenen Mus drude tam auch ideggelaffen werdebei weitem hiereblog um die Beftimmung ber Lange und nicht beitlage 1996 Bur pentil Bele gu thun mar, wie auch die Zwengeutigleit der Murgele große im Menner gu, ertennen gieht. Spllen inbeffen fernere Rechnungen fich barguf granden, fo muß es benbehalten werden.

W 6 247.

Mufg. Es find n Puntre gegeben : man foll bie Gleis dung einer Ebene finden welcher Die Emenichale gue

Commit, das, weim von febem der gegebenen Puntre ein Perpenditel auf diefe Ebene berabgelaffen wird, die Summe aller Perpenditel auf der einen Beite der Wenne eben fo groß fey, als die Summe der Perpenditel auf der aw deren Seite; oder mir anderen Worten, daß die algebrasische Summe aller auf der Ebene gezogenen Perpenditel = 0 feg.

Butt Cs fen Ax + By + Cz + D = o die gesuchte Sleichung der Ebene. Es seven ferner x', y', z', die Coordinaten des erften Puntses x'', y'', z'', die des groepten, x'', y'', z''', die des groepten, x'', y'', z'', die des groepten, x'', y'', z''', die des groepten, x''', y'', z''', die des groepten, x''', y''', z''', die des groepten, die groep

$$p' = -\frac{Ax'(+ By' + Cx' + D)}{V(A^2 + B^2 + C^2)},$$

$$p'' = -\frac{Ax'' + By'' + Cx'' + D}{V(A^2 + B^2 + C^2)},$$

$$p''' = -\frac{Ax''' + By''' + Cx''' + D}{V(A^2 + B^2 + C^2)},$$

Ruch ber Aufgabe foll aber p' + p" + p" + u. um e fenn; man erhalt alfo die Gleichung,

$$A'(x' + x'' + x''' tt.) + B(y' + y'' + y''' + tt.) + C(x' + x'' + x''' + tt.) + nD == 0;$$

und diefe Gleichung giebt die Beziehung an, welche gwischen ben angenommenen Grofen A, B, C, D, flatt finden muß, wenn ber Aufgabe ein Genage geschehen foll.

Buf hierans erhellet, sugleich, baf bie Aufgabe, wie fie vorgetragen worden, zu ben unbeftimmten gehöret, weil et

unendlich viele Berthe der Gröfen A, B, C, D, giebt, well che der gefundenen Bedingungsgleichung Genüge thun, also auch unendlich biele Stenen, welche die geforderte Eigenschaft bestigen. Goll daher die Aufgabe an einer bestimmten werden, so mussen, da eine der Größen A, B, C, D, willtührlich anges nommen werden kann, noch zwen Bedingungen gegeben seine B. B. die, daß die gesuchte Stene durch zwen gegebene Buntte geben solle.

Buntte; der andere sen durch die Coordinaten der eine bleser Puntte; der andere sen durch die Coordinaten x², y², z², ge geben. Die erste Bedingung wird erfüllt, wenn. D = 0 ik, die zwente giebt die Gleichung Ax² + By² + C² = 0. Bird also, der Kärze wegen, x' + x'' + x''' + 16. = X², y'+y"+y"+ 16. = Y², z' + z'' + z''' + z''' + z''' z = Z² gesest; so hat man die benden Gleichungen:

$$AX_1 + BA_1 + CS_1 = 0$$

 $Ax_1 + BA_1 + CS_1 = 0$

und diefe geben,

$$B = \frac{x^t Z^t - x^t X^t}{x^t Y^t - y^t Z^t} A_A C = \frac{y^t X^t - x^t Y^t}{x^t Y^t - y^t Z^t} A_A$$

eber, wenn A = ziYi - y'Zi gefest wird,

$$B = x^t Z^t - x^t X^t$$
, $C = y^t X^t - x^t Y^t$,

Die gesuchte Gleichung ber Chene ift bemnach unter bem angegebenen Bedingungen folgende:

$$(x^{i}Y^{i}-y^{i}Z^{i})\times +(x^{i}Z^{i}-z^{i}X^{i})y+(y^{i}X^{i}-x^{i}Y^{i})$$
 zero.

5 248.

Die Aufgabe des vor. L'e schließt die folgende in fic.

Anfg. Co find u puntte gegeben, welche alle in ein mer Chene liegen; man foll in diefer Chene eine gerade

Linte von folder Lage finden, daß die algebraische Summ me aller, aus den gegebenen Puntren auf ihr berabgelaß senen Perpendikel, = 0 sey.

Buf. Es giebt alfo unendlich viele geraden Linten, web der Aufgabe Benuge, thun. Man tann baber um die Aufgabe aus einer unbestimmten zu- einer bestimmten zu machen, moch eine Bedingung hinzusugen, a. B. die, daß die gesuchte Linte burch ben Anfangspunkt ber Coordinaten geben folle. Für Diesen fall ift D = o. Die Gleichung für die gesuchte Linte

permandels fich in Ax + By = 0, where, wenn $-\frac{A}{B} = \frac{A}{B}$ gefest wird, in y = ax, and es if

$$a = \frac{x - A}{B} = \frac{y' + y'' + y''' + 1c}{x' + x'' + x''' + tc}$$

Da = Tang. a (§ 231), fo laft fich die Linie auch burd eine febr leichte Conftrustion finden.

\$ 249.

Aufg. Es find n Puntre gegeben: man soll einen Puntr sinden, welcher so beschaffen ift, daß, wenn man aus demselben ein Perpendikel auf irgend eine Ebene, sie ser welche sie wolle, herabläßt, dieses Perpendikel n mal genommen, immer so groß ser als die algebraische Summe aller der Perpendikel, welche aus den n gegebenen Punkten auf diese Ebene herabgelassen werden.

Aufl. Es fen Ax + By + Cz + D = o'vie Sleichung irgend einer nach Willtuhr angenommenen Stene; x', y', z', x'', y'', z''', x'', x''', x''', x''', x''', x''', x''', x''', x'''', x'''', x'''', x'''''', ic. die Goordinaten der n gegebenen Punkte, und p', p''', p'''', ic. die Perpendikel aus diesen Punkten auf jene Stene; ferner x, y, z, die Coordinaten des gesuchten Punktes, und P sein Perpendikel' Atsdantisk, (5 246)

$$P = -\frac{Ax + By + Cz + D}{V(A^a + B^a + C^a)},$$

und die Perpenditel p', P", p", 1c., haben die in § 247 auf gegebenen Werthe.

Rach den Bedingungen der Aufgabe foll aber uP = p' + p'' + p''' + ic. from; man hat also
u (Ax + By + Gp + D) =

$$A(x' + x'' + x''' + z''' + z_{i'} + B_i(y' + y'' + y'' + z_{i'}) + C(z' + x'' + z''' + z_{i'}) + nD_i$$

oder,

$$n (Ax + By + C_2) =$$

$$A (x' + x'' + x''' + 16.) + B (y' + y'' + x''' + 16.) + C (z' + z''' + z''' + 16.).$$

Die Aufgabe forbett aber, daß die angegebene Eigenschaft bes gesuchten Punktes fur jede Seine ftatt finden fofte; alfo muß auch diese Gleichung fur jede beliebige Werthe der Großen A, B, C, richtig fenn. Daunun dies nur alebanu ftatt haben kann, wenn die benden Sheile der Gleichung ibentisch finds fo muß fenn,

$$nx = x' + x'' + x''' + xc.$$

$$ny = y' + y'' + y''' + xc.$$

$$nz' = x' + x'' + x''' + xc.$$

und baber.

Aufg. Es find n Punkte gegeben, und von diesen Punkten auf irgend sine Ebene die Perpendikel p', p", p", p", sc. herabgelassen worden; es sind ferner eben so vies le Jahlen m', m', m'', sc. gegeben; man sok einen Punktsinden, dessen Perpendikel P, die Ebene ser welche sie wolk le; jedesmal eine sothe Größe hat, daß m'p' + m''p' + m''p' + 16. P ser.

Auft. Werden die Bezeichnungen des wor. S's bepbehalt ten, und für p', p", p", m. ihre Werche aus § 247, desgletchen für P sein Werth aus dem vor. S in der Gleichung m'p', + m"p", + m"p" + 10. = (m/ + m" + m" + 10.) P suck kituirt: so erhalt man die Gleichung,

(m' + m" + m" + 1c.) (Ax + By + Cs + D) = **A**(m'x' + m"x" + m"x" + 1c.) + B (m'y' + m"y" + m"y" + 1c.) + C (m's' + m''x" + m'''s" + 1c.) + (m' + m" + m"' + 1c.) D. **soct**,

(m' + m'' + m''' + ic.) (Ax + By + Cs) = A(m'x' + m''x'' + m'''x''' + ic.) + B(m'y' + m'''y'' + ic.) + C(m'z' + m''z'' + m'''z'' + ic.)

Da biefe Gleichung richtig fenn muß, mas auch A, B, C, für Werthe haben mogen, weit die verlangte Sigenichaft des gesachten Punttes für jede Gbene gelten foll; fo muß fie ibem tifch fenn. Man hat daber

(m' + m" + m" + 16.) x = m'x' + m"x" + m"x" + 16. (m' + m" + m" + 16.) y = m'y' + m"y" + 16. (m' + m" + m" + 16.) s = m's' + m"s" + 16. und hierans

Anmer ?. Die Aufgabe des vorigen S's ift nur eine seiner Fall von dieser weit allgemeineren, und die daselbst ans gegebenen Ausdrücke für x, y, z, ergeben sich aus diesen, wenn m' = m'' = 18. gesets wird; denn alsdann wird m' + m'' + 12. = hm, und

$$m'x' + m''x'' + m''x''' + \kappa = m (x' + x'' + x''' + \kappa),$$

 $m'y' + m''y'' + m'''y''' + \kappa = m (y' + y'' + y''' + 10),$
 $m'z' + m''z'' + m''z''' + \kappa = m (z' + z'' + z''' + 10).$

Der Punkt, der hier gofunden worden, ift kein anderer als der Schwerpunkte benn benkt man fich unter m', m'', m''', m'', m''', m'', m''', m''', m''', m''', m''', m''', m''', m''', m''', m'''', m''', m'''', m'''', m''', m''', m'''', m'''', m'''', m''', m'''', m'''', m''', m''', m''', m'''', m''

Die Saupteigenschaft des Schwerpunttes, daß für jede Seine die Summe der Momente der einzelnen Maffen dem Momente ihres Schwerpunttes, wenn man fic alle Maffen in demselben vereinigt deutt, gleich sen, ift also hier ohne Hulfe ftatischer Arincipien erwiesen worden. Man fiebet biere aus, daß dieser Puntt eben so gut der Geometrie als der Side

til angehöre, und baß man fic feiner ben geometricen Um terfuchungen ohne Berftes witter Die Methode bebienen barfa wenn die Large ober die Deutlichteit et ferbert.

§ 251.

Aufg. Es sind n Whenen der Lage nach gegeben: man soll den Ort aller der Punkte sinden, welche die Wisgenschaft, bestigen, daß, wenn man von einem dieser Punkte auf jene n Ebenen die Perpenditel p', p'', p''' ie berabläß:, und jedes dieser Perpenditel mit einet der resspektiven Jahlen m', m'', m''', ic, multiplicitt, die alges braische Summe aller dieser Produkte einer gegebenen. Größe g gleich sey; d. h. daß m'p' + m''p" + m''p" + ic, = g sey.

Mufil. Es fenen

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

 $A''x + B''y + C''z + D''' = 0,$
 $A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0,$

bie Gleichungen ber gegebenen Sbenen, und u', y', z', bie Soordinaten bes gefuchten Punttes; fo ift, wenn ber,Rurge wegen,

$$\frac{1}{V(A^{12} + B^{12} + C^{12})} = k', \quad \frac{1}{V(A^{112} + B^{112} + C^{112})} = k'', \quad \frac{1}{V(A^{112} + B^{112} + C^{112})} = k'', \quad \frac{1}{V(A^{112} + B^{112} + C^{112})} = k''', \quad \frac{1}{V(A^{112} + B^{112} + C^{112})} = k'''', \quad \frac{1}{V(A^{112} + B^{112} + C^{112})} = k''', \quad \frac{1}{V(A^{112} + B^{112} + C^$$

pefett wird, (5 246)

$$p' = -k' \cdot (A'x' + B'y' + C'z' + D')$$

$$p'' = -k'' \cdot (A''x' + B''y' + C''z' + D'')$$

$$p''' = -k'' \cdot (A''y' + B''y' + C''z' + D''')$$

Berben biefe Berthe in ber Gleichung

m'p' + m''p'' + m'''p''' + 16. — q = 0 1

∓∓= 'O

Die Coordinaten x', y', 2', bes gesichten Puntes muffen bemnach eine solche Beziehung negen einander haben. wie fle Biese Gleichung angiebt. Für jede zwen nach Willeuhr angenoms meine Coordinaten icht fic aber jedesmal die britte so bestims meine daß sie bieser Steichung Genüge chut. Es giebt also uns eindlich viele Punte, welche die verlangte Eigenschaft bestigen, und alle diese Puntte liegen in einer Chene, deren Gleichung (A) x + (B) y + (C) z + (D) = 0 ift, wenn

- (A) = m&A! 4 m/k/A// + m//k//A// + 16
- $\mu(B) = m'k'B' + m''k''B'' + m''k'''B''' + ic.$
- (B) = m/k/C/+ m/k//C// + m//k//C/// + y.
- (D) m m'k'D' + m''k''D'' + m''k''D''' + 1c + q gesest wird.

Erft. Bu f. Da bier q bloß in dem letten Siebe der Gleichung (A) ± + (B) y + (C) z + (D) = 0 vortommts so folgt, daß für die namlichen gegebenen Soenen und für die namlichen Sahlen m', m' m'', ic., die Ebenen, deren Punkte die Sigenschaft besitzen, daß die Summe m'p' + m''p'' + m''p'' + ic. für jede derselben sichimmer gleich bleibt, alle einander parastel find.

Bwent, Bus. Gest man C' = C" = c" = ic. = o, fo verwandeln fich die Gleichungen ber gegebenen Sbenen in die Gleichungen A'z + B'y + D'=0, A"x + B"y + D" = 0,16.,

für gegebene gerade Linien; alsbann wird aber auch angleich (C) = 0, und die Gleichung (A)x + (B)y + (C)z + (D) = 0 der gesuchten Seene verwandelt sich in die Gleichung (A)x + (B)y + (D) = 0 für die gesuchte Linie. Hierdurch wird also die Ausgabe ausgelöst: wenn n in einer Seene lies gende gerade Linien der Lage nach gegeben sind, den Ort allet der Punkte zu sinden, deren seder die Sigenschaft bestet, das, wenn von denselben auf sene Linien die Perpendikel p', p'', p''', 1c. heradgelassen werden, immer m'p! + m''p'' + m'''p''' + 1c. = q sen. (Neber dies Ausgabe insbesondere seho man den Andang zur pohygonometrie vu de su mesure des figures recrisignes des par S. Lhuisier; Geneve 1789, desgleichen Apollonius ebene Oerter, übers von Camerer, Leipe 18g 1796, S. 146 – 171.)

\$ 252,

$$V[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-y)^2] = r,$$
oter
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-y)^2 = r^2.$$

Sest man a und y = 0, fo verwandelt fich bie Sleis

dung für bie Rugel in eine Steidung für ben Rreis. Die Gleichung fur ben Rreis ift bemnach,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = x^2$$

Soll eine Gleichung zwischen x, y, z, der Augel zugehör ten, so muß fie mit der oben angegebenen identisch sen, weil sonft nicht für seden beliebigen Werth zweier Coordinaten die drifte denselben Werth erhalten könnte. Die Entwikkelang der obigen Gleichung für die Augel giebt aber -

 $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2yx + \alpha^2 + \beta^3 + y^2 - x^2 = 0$. Es tann also die Gleichung, welche der Rugel zugehören soll, Beine andere Korm als diese haben:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$
.

If umgelehrt eine folche Gleichung gegeben, fo laft fich jer besmal die Rugel bestimmen, welcher fie zugehört; benn ba fie mit jener ibentisch senn muß, so muß fenn

$$-8\alpha = A, -8\beta = B, -2y = C,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - x^3 = D.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man $x = \frac{1}{4}$ A_r $B = -\frac{1}{4}B$, $y = -\frac{1}{4}C$, und wenn man diese Werthe in der dritten Gleichung substituirt, x = V $\left(\frac{A^2 + B^2 + C^2}{4} - D\right)$. Dieraus erglebt sich augleich, daß, wenn die Gleichung $x^2 + y^2 + z^4 + Ax + By + Cz + D = 0$ der Augel augehören

foll, D nicht größer als $\frac{A^a+B^a+C^a}{4}$ fenn barf, weil fonft z imaginde werden warbe. If D = $\frac{A^a+B^a+C^a}{4}$, so ill

x == 0, und die Augel verwandels fich in einen Punkt.

Alles, was hier von der Augel gefagt worden, gilt auch mit einigen Abanderungen für den Areis. Die Gleichung für

den Kreis ift namlich $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = x^2$, oder ence widelt $x^2 + y^2 - 2\alpha x - \beta \beta y + \alpha^2 + \beta^2 - x^2$. Die Gleis dung für den Kreis kann also keine andere Form als diese haben,

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

and min hat aledann a = - FA, B = - IB,

$$r = V\left(\frac{A^2 + B^2}{4} - C\right).$$

Die mimlichen Resultate wurde man aber auch erhalten has ben, wenn man in denen fur die Rugel C und z = 0, und hierauf C anflatt D geset hatte.

5-25%·

Aufg. Es find n Punkte gegeben: man foll ben Ort eines Punktes finden, der so beschaffen ift, daß, wenn von demselben Linien nach den gegebenen Punkten gezos gen werden, die Summe der Quadrate aller dieser Livuen einem gegebenen Quadrate gleich sey.

Bufl. Es fenen x', y', z', x', y'', z'', x''', y'', x''', y'', x''', x''

$$L'^{2} = (x - x')^{2} + (y - y')^{2} + (z - z')^{2}$$

$$L''^{2} = (x - x'')^{2} + (y - y'')^{2} + (z - z')^{2}$$

$$L'''^{2} = (x - x'')^{2} + (y - y'')^{2} + (x + x'')^{2}$$

ober entwickell,

Line = x2 + y2 + z2 - 2x'x - 2y'y - 2z'z + x'2 + y'2 + z/2

Line = x2 + y2 + z2 - 2x''x - 2y''y - 2x''z + x''2 + y''2 + z''2

Line = x2 + y2 + z2 - 2x''x - 2y''y - 2x''z + x'''2 + y'''2 + z'''2 + z'

Rach der Aufgabe foll aber L'a + Lina + Lina + 1c. = q fepn; man hat atfo die Gleichung.

Deci

$$\frac{A}{n} (y' + y'' + y''' + z'') y - \frac{A}{n} (z' + z''' + z'''' + z''' + z'''' + z''' + z'''$$

Mus der Form Diefer Gleichung ertemer winn, buff: Der gefuchte Ort eine Rugelflache fen.

Halt man fie mit der allgemeinen Gleichung für die Kw gelfiche x² + y² + z² - 2 ax - 2 by - 2 yz + a² + β² + y² - x² = 0

sufammen, fo ergiebt fich aus ber Bergleichung

$$\alpha = \frac{1}{n} (x' + x'' + x''' + xt.)$$

$$y = \frac{1}{\pi} (y' + y'' + y''' + w)$$

$$y = \frac{1}{n} (2! + 2!! + 2!! + 16)$$

Geometrie IL.

Birche' po die Coordinaten ves Mittelpuntes beftimmen labfen. Der halbmeffer reigiebt fo aus ber Gladung.

Erft. Bus. Wergleicht man die hier für die Coordinaton.

a, By-pe, gesundenen Ausdrücke mit deuen, weiche in § 249
fin die Coprdinaten des Schwerpunktes geführen warden, soeigisch fich, dus der Mittelpinkt des gesuchten Dries kein and derer als der Schwerpunkts des gegebenen Punkte sen, wenn man sich diese als gleich schwer benkt.

Broe fie Buf. Da man g jebesmat fo bestimmen tann, daß x einen gegebenen Wers erhalt, so ergiebt fich ber fot genbe merkwurdige Lehrsau:

pegeben sind, tind aus threm Schwerpunkte mit einem beliebigen Salbmesser eine Augel beschrieben wird, und metwallen gegeben wir einem Dunkte der Augelstäche nach den gegebenen Punkten gerade Amen gezogen werden: so ist die Summe der Quadrate aller dieser Linien sur jeden Punkt der Augelstäche immer von einerley Größe.

Dritt. Buf. Bus diefem Sape lest fich der folgende, als ein einzelner Kall beffelben, herleiten:

Wenn so viele Puntie, als man will, in einer Ches ne gegeben find, und aus ihrem Schwerpuntte mir eis nem beliebigen Salbmeffer ein Reels beschrieben wird, und wenn alsdann aus irgend einem Puntre auf der Peripherie dieses Areiles nach den gegebenen Puntren gerade Linien gezogen werden, so ist die Summe der Quabrate dier biefer Linien-für jeben Puntt beh Breise petipherie ininer obig ethertey Geoffe.

Anmert. Den Ort, aber nur far ben Kreis und fur Puntte, welche in einer Sbene liegen, fand Apollonius (m. s. bie oben angef. Uebers. S. 263 — 310) wie fic von selbst berfiebet, geometrisch; die Bemertung Just 1, aber nur'ffte ben Kreis ind fut brei Puntte, welche in einer Gent tienen) machte Fermat in einem Griefe an Robervall (m. s. feinst Var. Op. Math. p. 151); der Sun Auf. 3 ift von Aungen (Horologium popillatarium. Prop. 14); ber Sas Bus. 2 ift swar neu, gereicht mit aber. zu keiner Ebre, weil er auf dem analytischen Mege, den ich eingeschlagen habe, leicht zu sinden war.

-16 37 19 1140 S 2341

Aufgi Enfind Dintte gegeben; man fon den Ore kines allbilielt Priffes finden, der fo beichaffen ift, daßpwenn von biefen Duntte gerade Linien nach den geneben nen Punkten gezogen werden, und hierauf jedes biefen Lintarur mit einer gewister gegedenen Jahl muntplicire wird, die Summe aller hierburch edantenen Probuste ift nei gegedenen Gebe gleich sey.

Aufl. Man behalte die Bezeichnungen bes vor. D's ben, und bezeichne noch überbies die Jahlen, durch welche die Diasbrate der Linien multiplictet werden follen, burch m', m', m'', 1c. Die Bedingungen der Aufgabe gnalptifc autgesbrutt, geben alsbenn die Gleichung

m'L's + m'L''s + m''L'''s + 16. = q.

Werden hierin für Lin, Lin, Linn, 1c., ihre Werthe aus bem por. S jubstitufet, fo erhalt man die Gleichung,

(m'x'+m''x''+m''x'''+ic.)x-2(m'y'+m''y''+m''y'''+1c.)y
-2(m'x'+m''x''+m'''x'''+ic.)x+m'x''*+m''x''**+m'''x''**
+1c.'+m''y''^2+m''y''^3+m''y'''**+ic.+
m'x'^2+m''x''*+m''x'''*2+ic.-q^2=0.

Wird diese Gleichung durch m' + m" + m" + ic, dividirt, fo exhalt, ge die Korm einer Steichung, für die Lugel, und wan findet

m'x' + m'x" + m''x" + m''x" + 20.

woraus fic ferner ber Ausbruck fur r finden laft.

Buf. Dentt man fic unier m', migging, ic., Maffen anfatt Bablen; fo find (§ 250) a, B, 30, die Coardinaten ibrot Schwerpunttes. hieraus ergiebt. fic der folgende bocht merke warbige Gas:

Wenn so viele schwere Pinkte als man will, von gleichen oder ungleichem Gewichte, im Aaume gegeben sind, und aus dem Schwerpunkte derselben mit einem beliebigen Saldmesser eine Augel beschrieben wird; wenn ferner aus irgend einem Punkte der Augelstäthe nach jenen Punkten gerade Linien gezogen werden, und das Quadrat einer jeden dieser Linien mit dem Gewichte des Punktes, nach welchem sie gezogen ift, multiplicite wird: so ist die Summe dieser Produkte für alle Punkte der Augelstäche von einerley Größe.

AVI. Relationen swifthen ben Cobebinaten breper Punkte. Gebrauch berfelben bei ber Auflösung einiger, bie brepseitigen Ppramiben betreffenben.

Der berühmte Lagrange, dessen Bekanntschaft zu Machen wir hier zuerst Gelegenheit haben, giebt in einer meisterhaften Ibhandlung über die Phramide (f. Mem. de l'acad. roy. des Scienc. et des bell. lett. de Berkin 1773. p. 149 — 1763 einige Relationen zwischen den Coordinaten drever Punkte, und zeigt hierauf die Anwendung, derselben auf den Hauptgegens Kand der Abhandlung, nämtich auf die Analyse der dreve seitigen Pramide. Abhesehen von diesen Anwendungen, sind aber zene Relationen auch schon an sich merkwürdig, und können in vielen Källen, vorzüglich in der Khegrie der Gleis dungen und in einigen Cheilen der Wechanit ihren Juhen haben. Ich habe däher kein Gedenken getragen, sie hier, als und dem schicklichken Orte, anszunehmen, und ihren Gebrauch durch einige Aufgaden zu erläutern.

Se fein x'; y', x', x'', y'', x'', x''', y''', z''', die Coredinaten dreper Puntte, ober überhaupt nean willtührliche Größen. Aus diesen Größen formide man die Ausdrücke, wie fie hier unten in I, II, III, IV, V, VI angegeben werden, indem man, der Kürze und der leichtern Aleberschen wegen, den jedese mal erhaltenen Ausdrücken einzelne Buchfluben substitutet. So werden alsdann unter diesen Ausdrücken die Relationen flatt finden, die in VII, VIII, ... XX, angegeben find. Die Art, wie sie baraus hergeleitet werden, sindet man weiter unten erklärt.

a) Formirte Ausbrucke.

Shipping a strating to be a substitute of the $x'^{2} + y'^{2} + z'^{2} = \alpha'$ $x''x''' + y''y''' + z''z''' = \beta'$ $x''^{2} + y''^{2} + z'^{2} = \alpha''$ $x'x''' + y'y''' + z'z''' = \beta''$ $x''^2 + y''^2 + z''^2 = \alpha''$ $x^{(1)2} + y^{(1)2} + z^{(1)2} = \alpha^{(1)}$ $x^{(2)} + y^{(2)} + z^{(2)} = \beta^{(1)}$ $z''x''' - x''z''' = \eta'$ $x'z''' - 3'x''' = \eta''$ > **x**//*//-- **x**″y‴ ⇒ § . . . $\pm y''' - y'z''' = \xi''$ $y'z'' - x'y'' = \xi''', y'z'' - x'z'' = \eta'''$ x''y'''-y''x'''=2 $y'x'''-x'y'''=\zeta''$ $x'y'' - y'x'' = \xi'''$ **III.** F3676 11 IV. $= a^{2i}\alpha^{ij} - \beta^{ij} = a^{i} + \dots + \beta^{ij}\beta^{ij} - \alpha^{i}\beta^{i} = b^{i}$ $-\mathcal{C} = \alpha^{\prime} \alpha^{\prime\prime\prime} + \beta^{\prime\prime2} = \alpha^{\prime\prime} \qquad \qquad \beta^{\prime\prime} \beta^{\prime\prime} + \alpha^{\prime\prime} \beta^{\prime\prime} = b^{\prime\prime} .$ Ladan - Bus a and San Spire - angue bu $\mathbf{a}''\mathbf{a}''' - \mathbf{b}'^2 = \mathbf{A}'$ $1 \cdot b'b'' - a'b'' = B'$ "" = B" = B" *** : #'#" - b" = A" 35% ate//. - b///8 - A/// $b'b'' - a''b'' \Rightarrow B'''$ VI. $\mathbf{X}^{\mu} = \mathbf{X}^{\mu} = \mathbf{X}^{\mu}$ mish - sink = Xiii was to a fugur - quemes 20 $\pi'\xi'' - \xi'\eta'' = Z''$

20 Million Hall - 215" - 21"

b) Relacionen.

VIII.

 $X^{12} + Y^{12} + Z^{12} = A'$ $1 X^{12} + Y^{12} + Z^{12} = A^{11}$ $2 X^{112} + Y^{112} + Z^{112} = A^{11}$ $2 X^{112} + Y^{112} + Z^{112} = B^{11}$ $3 X^{11} + Y^{1}Y^{11} + Z^{1}Z^{11} = B^{11}$ $3 X^{11} + Y^{1}Y^{11} + Z^{1}Z^{11} = B^{11}$ $3 X^{11} + Y^{1}Y^{11} + Z^{1}Z^{11} = B^{11}$

IX

 $X' = \lambda x'$ $Y' = \lambda y'$ $Z' = \lambda z'$ $X'' = \lambda x''$ $Y'' = \lambda y''$ $Z'' = \lambda z''$ $X'' = \lambda x''' + X'' = \lambda y'''$ $Z'' = \lambda z'''$ $X' = \lambda x''' + X'' = \lambda y'''$ X_{\bullet} $A' = \lambda^{2} \alpha''$ $A'' = \lambda^{2} \alpha''$ $A'' = \lambda^{2} \alpha'''$ $A'' = \lambda^{2} \alpha'''$

XI

 $\lambda^{2} = \alpha'\alpha''\alpha''' + 2\beta'\beta''\beta''' - \alpha''\beta'^{2} - \alpha''\beta''^{2} - \alpha''\beta''^{2}$

XIII.

>◆ = A'a' + A'a'' + A''a'' + a(B'b' + B'b'' + B''b'')

für gegebene gerade Linien; alsdann wird aber auch zugleich $(C) \pm 0$, und die Gleichung (A)x + (B)y + (C)z + (D) = 0 der gesuchten Sene verwandelt fich in die Gleichung (A)x + (B)y + (D) = 0 für die gesuchte Linie. Hierdung (A)x + (B)y + (D) = 0 für die gesuchte Linie. Hierdung wird also die Ausgabe aufgelöst: wenn n in einer Sene lies gende gerade Linien der Lage nach gegeben sind, den Ort aller der Punkte zu sinden, deren seber die Eigenschaft bestist, daß, wenn von denselben auf sene Linien die Berpendikel p', p'', p''', 1c. heradgelassen werden, immer m'p! + m''p'' + m'''p''' + 10 = q sen. (Ueber diese Ausgabe insbesondere seho man den Anhang zur pohygonometrie vu de sit mesure des figures rectilignes dro. par S. Lhuikier, Geneve 1789, desgleichen Apollonius edene Oerter, übers, von Camerer, Leips zig 1796, S. 146 — 171.)

§ 252,

Nad der gewöhnlichen Definition ist die Lugel ein Körper, welcher von einer Alde begränzt wird, in der alle Puntte von einem gewissen anderen Puntte, welcher der Mitzelpuntt genannt wird, gleich weis entsern find. Ditz se Definition analytisch ausgedruckt, giebt unmintelbar die Gleichung der Augel. Dann bezeichnet man die Coordinaten des Mittelpunttes durch α , β , γ ; so ift nach β 245 seine Entzstrung von sedem anderen Puntte, dessen Coordinaten x, y, x sund, y [$(x-\alpha)^a+(y-\beta)^a+(x-\gamma)^a$]. Seht man mun den haldemesser der Augel x, so muß für alle Puntte der Augelstäche eine solche Beziehung zwischen x, y, z, statt sinden, daß dieser Ausdruck x wird. Wan hat also die Sleichung

$$V[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-y)^2] = r,$$
oter
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-y)^2 = r^2.$$

Sest man a und y = 0, fo verwandelt fich bie Sleis

dung für bie Lugel in eine Steidung für ben Rreis. Die Gleichung fur ben Rreis ift bemnach,

$$(\mathbf{x} - \alpha)^2 + (\mathbf{y} - \beta)^2 = \mathbf{r}^2$$

Soll eine Gleichung awischen x, y, 2, ber Ruget gugeborten, so muß fie mit ber oben angegebenen ibentisch senn, weil sonft nicht für seben beliebigen Wenth gweber Coordinaten bie britte benfelben Werth erhalten tonne. Die Entwidelung ber obigen Gleichung für die Augel giebt aber

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$
.

If umgekehrt eine folche Gleichung gegeben, fo laft fich jer besmal die Rugel bestimmen, welcher fie zugehört; benn ba fie mit jener identisch senn muß, so muß fenn

$$-2\alpha = A, \leftarrow 2\beta = B, -2y = C,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = D.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhalt man = $\frac{1}{4}$ A, $\beta = -\frac{1}{4}B$, $\gamma = -\frac{1}{4}C$, und wenn man diese Werthe in der dritten Gleichung substitutes, $x = \gamma \left(\frac{A^2 + B^2 + C^2}{4} - D\right)$.

Hieraus erglebe fich jugleich, das, wenn die Gleichung xa + ya + xa + Ax + By + Cz + D == o ber Augel jugeboren foll, D nicht größer als $\frac{A^a + B^a + C^a}{4}$ feyn darf, weil sonft

x imagindr werden warde. Ift $D = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{4}$, so ift x = a, und die Augel verwandels fic in einen Punkt.

Alles, was hier von der Lugel gefagt worben, gilt auch mit einigen Abanderungen far ben Rreis. Die Gleichung far den Areis ift nanlich $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$, oder ents widelt $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2$. Die Gleich dung für den Preis kann also keine andere Form als diese haben,

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

and man hat aledann a = - IA, B = - IB,

$$\mathbf{r} = \mathbf{v} \left(\frac{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2}{4} - \mathbf{C} \right).$$

Die namlichen Resultate wurde man aber auch erhalten has ben, wenn man in denen fur die Rugel C und z = 0, und hierauf C anstatt D geset hatte.

\$ 253.

Aufg. Es find n Puntte gegeben: man foll ben Ort eines Punttes finden, Der so beschaffen ift, daß, wenn von demselben Linien nach ben gegebenen Puntten gezor gen werden, die Summe der Quadrate aller dieser Lieuten einem gegebenen Quadrate gleich sey.

Bufl. Es fepen x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', z''', x''', y''', z''', x''', x''',

$$L''^{2} = (x - x')^{2} + (y - y')^{2} + (z - z')^{2}$$

$$L''^{2} = (x - x'')^{2} + (y - y'')^{2} + (z - z'')^{2}$$

$$L'''^{2} = (x - x'')^{2} + (y - y'')^{2} + (z + x'')^{2}$$

ober entwidelt.

Line = x2 + y2 + 22 - 22"x - 22"y - 22"z + x"2 + y12 + 202

Line = x2 + y2 + 22 - 22"x - 22"y - 22"z + x"2 + y"2 + 2"2

Line = x2 + y2 + 22 - 22"x - 22"y - 22"z + x"2 + y"2 + 2"2

2"2, 16.

Nach der Aufgabe foll aber L'a + L'a + L'a + 1c. = q fepn; man hat also die Gleichung,

2961

$$\frac{A}{n} (y' + y'' + y''' + z'') = -\frac{A}{n} (z' + z'' + z''' + z'') = -\frac{A}{n} (z' + z'' + z''' + z'''' + z''' + z'''' + z'''' + z''' + z'''' + z''' + z'''' + z''' + z'''' + z''' + z'''' + z''' + z'''' + z''' + z'''' + z''' + z'''' + z''' + z'''' + z''' + z'''' + z''' + z'''' + z''' + z'''' + z''' + z'''' + z''' + z'''' + z''' + z''' + z''' + z''' + z''' + z'''' + z''' + z''''$$

and and a great and the state of the state

Mus der Form diefer Gleichung ertenner unn , buff des gefuchte Ort eine Rugelfidde fen.

Salt man fie init der allgemeinen Gleichung fur Die Rugelfidde

x² + y² + z² - 2αx - 2βy - 2yz + α² + β² + y² - z² : gusammen, so ergiebt sich aus der Bergleichung

$$-\beta = \frac{1}{n} (y' + y'' + y''' + w).$$

$$y = \frac{1}{n} (2' + 2'' + 2''' + 16)$$

Geometrie IL.

Birche fid die Coordinaten bes Mittelpuntres beftimmen laft. Der halbmeffer reigtebe fic aus ber Gledung,

$$r^{2} = \left\{ \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

Erft. Bus. Wergleicht man die hier für bie Coordinaton.

a., By-p., gefondenen Ausbrücke mit deuen, weiche im \$1249

fin die Coprilinaten des Schwerpunktes geführen werden, soeigisch fich, dus der Mittelpinkt des gefuchten Ortes kein and derer als der Schwerpunkt des gegebenen Punkte sep, wenn man sich diese als gleich schwer denkt.

Ine ha Juf. Da mon g jepesmat fo bestimmen tann, daß r einen gegebenen Wers erhalt, so ergiebt fich ber fot gende merkwurdige Lehrsap:

gegeben sind, eine Punter, als man wit, im Aanme gegeben sind, eine aus threm Schwerpunkte mit einem beliebigen Salbmesser eine Kügel beschrieben wird, und zwegnealbamm aus irgend einem Dunkte der Augelstäche nach den gegebenen Punkten gerade Aimen gezogen werden; so ist die Summe der Quadrate aller dieser Linien sir seden Punkte der Augelstäche immer von einerley Größe.

Oritt. Buf. Bus biefem Sape lift fich ber folgende,

Wenn so viele Puntie, als man will, in einer Cher ne gegeben find, und aus ihrem Schwerpuntte mit eie nem beliebigen Salbmeffer ein Areis befchrieben wird, und wenn alsdann aus irgend einem Puntre auf der Peripherie diefes Areifes nach dem gegebenen Puntren gerade Linien gezogen werden, so ist die Summe der Quabrafe dier biefer Linien für joden Punte beb Breise setipherie inimeterobie einerleg Gebfe. Die Geberte bei gete bei

Anmerk. Den Ort, aber nur far den Kreis und für Puntte, welche in einer Ebene liegen, fand Apolldnius (m. s. die oben angef. tlebers. S. 263 — 310) wie fic von selbst verkehet, geometrisch i die Bemerkung Juf. 1, aber nut für den Kreis und fur breis Puntte, welche in einer Coedi thenen) machte Fermat in einem Briefe an Robervall (m. s. frind Var. Op. Math. p. 151); der Sun Auf. 3 ift von Sungen (Horologium pspillatarium Prop. 14); der San Buf. 2 ift war neu, gereicht mit aber zu keiner Ebre, weil er auf dem analotischen Boge, den ich eingeschlagen habe, leicht zu finden war.

Y with \$ 254

Aufg. Einen Duntte gegeben; man foll ben Ore eines allbetell Plifftes finden, ber fo beichaffen ift, bagy wenn von biefen Duntte gerade Linien nach ben genebenen Duntten gezogen werden, und hierauf jedes blefen Eintdrure mit einer gewißen gegebenen Jahl muluplicire wird, die Summe aller bierdurch erhaltenen Probaste ife fier gegebenen Bebeiten Gebeiten Gebeiten Gebeiten Gebeiten Gebeiten

Aufl. Man behatte die Bezeichnungen bes vor. f's ben, und bezeichne noch überbies die Jahlen, durch welche die Odas drate der Linien multiplicirt werden follen, durch m', m', m'', 2c. Die Bedingungen der Aufgabe analytisch ausges draft, geben alsdenn die Gleichung

m'L'2 + m'L'12 + m''L'112 + 16. = q2.

Werden hierin für Lin, Lin, Lin, ic., ihre Werthe aus bem por. S substituiet, so erhalt-man die Gleichung,

Bied diese Gleichung durch m' + m" + 20, diwidire, fo exhalt, fie die Form einer Gleichung, fir die Lugel, und wan findet

m'x' + m''x" + m''x'' + 20.

worans fich ferner ber Ausbrud fur I finden läßt.

Buf. Denft man fic unier ma, my mull, ic., Maffen anfatt Bablen; fo find (5 250) a, B, 30, die Coardinaten ibres Schwerpunttes. hieraus ergiebt fich der folgende hochft merke warbige Gas:

Wem so viele schwere Punkte ale man will, von gleichen oder ungfeichem Gewichte, im Anume gegeben sind, und aus dem Schwerpunkte derselben mit einem beliebigen Saldmesser eine Augel beschrieben wird; wenn serner aus irgend einem Punkte der Augelstäche nach jenen Punkten gerade Linien gezogen werden, und das Quadrat einer jeden dieser Linien mit dem Gewichte des Punktes, nach welchem sie gezogen ift, multiplicite wird: so ist die Summe dieser Produkte für alle Punkte der Augelstäche von einerley Größe.

XVI. Restrionen zwischen ben Cobebinaten brever Punkte. Gebrauch berfelben bei ber Aufibsung einis ger, bie brepfeitigen Ppramiben betreffenben Aufgaben.

Der berahmte Lagrange, beffen Befanntichaft ju machen wir hier querft Belegenheit haben, giebt in einer meifterhaften Shandlung über die Phramide (f. Mem. de l'acad. roy. des Scienc, et des bell, lett. de Berlin 1773, p. 149 - 176) einige Relationen swifchen ben Coordinaten breper Punkte, und geigt bierauf die Anwendung berfelben auf ben Saupigegente Rand ber Abhandlung, namtich auf bie Anglofe ber brene feitigen- Byramibe. Abgefeben von biefen Anwendungen, find aber jene Relationen auch icon an fic mertmurbig, und Bonnen in vielen Kallen, vorzuglich in der Chegrie ber Gleis dungen und in einigen Cheilen ber Dechanit ihren Raten haben. 3d habe daber tein Bebenten getragen, fie bier, als fan dem fcidlichften Orte, aufzunehmen, und ihren Gebrauch burd einige Aufgaben go erlautern.

\$ 265.

Es fenn x', y', s'; x", y", z", x", x", z", bie Coore binaten breper Bunfte, ober überhaupt neun willtabrliche Bros Ben. Aus diefen Groffen formite man die Ausbrude, wie fie bier unten in I, II, III, IV, V, VI angegeben merben, indem man, ber Rurge und ber leichtern Heberficht megen, ben jedesmal erhaltenen Ausbruden einzelne Buchftaben fubftituirt. Es werden alsbann unter Diefen Ausbruden Die Relationen fatt finben, die in VII, VIII, ... XX, angegeben find. Die Art, wie fle baraus bergeleitet merban, findet man weiter unten erflatt.

a) Forinirte Ausbrücke.

 $x''^{2} + x''^{2} + z''^{2} = \alpha'$ $x'''' + y''^{2} + z''z''' = \beta'$ $x'''' + y'''' + z''z''' = \beta''$ $x'''^2 + y''^2 + z'''^2 = \alpha''^{1}$ $x'x'' + y'y'' + 2'x''' = \beta'''$ z"x"-x"z"= v y"="-z"y"=5 $x'z''' - x'x''' = \eta''$ $z'x'' - x'z'' = \eta'''$ $\mathbf{x}'\mathbf{x}''' - \mathbf{y}'\mathbf{z}''' = \boldsymbol{\xi}'' \quad .$ y'z" - z'y" = \$"' $y'x'''-x'y'''=\zeta''$ $\mathbf{x}'\mathbf{y}'' - \mathbf{y}'\mathbf{x}'' = \mathbf{S}'''$ **(李字/\$#* + y/z//\$#(+ z/x//y//+ x/z//y//- y/z//z// - z/y//2# IV. $= a^{ij}\alpha^{ij} + \beta^{ij} = a^{ij} + \cdots + \beta^{ij}\beta^{ij} + \alpha^{ij}\beta^{ij} = b^{ij}$ - 200 dam - pm = = 21 110000 110 pm + 411pm = by . in tallout - But am am in the But - amam but $a''a''' - b^{i2} = A'$ * b'b''-a'b' '= B' " 'B'g'' - b''2 = A" | " | b'b'' - 4"b" = B" 367 ata// - b//8 - A// b'b" — a"b" == B". · VI. named and a second and a second second क भारता — देशमा क्रांडिया — देशमा — देशमा — देशमा — प्राण aris gram — green = 21. 7'5" -5'7" = Z" The without the the many

b) Reigenonen.

VIII

$$X^{12} + Y^{12} + Z^{12} = A'$$
 $X^{112} + Y^{112} + Z^{112} = A''$
 $X^{112} + Y^{112} + Z^{112} = A''$
 $X^{112} + Y^{112} + Z^{112} = B''$
 $X^{11} + Y^{1}Y^{11} + Z^{1}Z^{11} = B''$
 $X^{1}X^{11} + Y^{1}Y^{11} + Z^{1}Z^{11} = B''$

IX

 $X' = \lambda x' \qquad Y' = \lambda y' \qquad Z' = \lambda z'$ $X'' = \lambda x'' \qquad Y'' = \lambda y'' \qquad Z'' = \lambda z''$ $X'' = \lambda x''' + \lambda x''' + \lambda x'' + \lambda x'''$ $X' = \lambda^2 \alpha'' \qquad X'' = \lambda^2 \beta'$ $A'' = \lambda^2 \alpha'' \qquad B' = \lambda^2 \beta''$

XI

 $A''' = \lambda^2 \alpha'''$

- '- 'Br \= \28"

A 5 Grawners

xiii. +

 $\bullet = \frac{\mathbf{A}'\mathbf{a}' + \mathbf{A}''\mathbf{a}'' + \mathbf{A}''\mathbf{a}''' + \mathbf{a}(\mathbf{B}'\mathbf{b}' + \mathbf{B}''\mathbf{b}'')}{\mathbf{A}''\mathbf{a}''' + \mathbf{A}''\mathbf{a}''' + \mathbf{A}''\mathbf{a}''' + \mathbf{A}''\mathbf{a}''' + \mathbf{A}''\mathbf{a}''' + \mathbf{A}''\mathbf{a}''' + \mathbf{A}''\mathbf{a}''' + \mathbf{A}''\mathbf{a}'' + \mathbf{A}$

XIV.

the contraction of the same of the same of the Marie Mary marketing XV. I have

· 李小小名水十万名水子十名水山山—李公山地—李公山山—

本品十五品十五品十五品

x'n' + x"n" + x"n" = 0 ヹ゚゚゚゚ + x*゚゚゚゚" + x*゚゚゚" ⇌ o

y'€! + y"€" + ym'€" = • $y'n' + y''n'' + y'''n''' = \lambda$

y'\$' + y"\$", + y""\$" = 0 · 电影十四岁 = 0 · 111

12 4 2/m" + 2"n" = 0 Mg ='\$' + ="\$" + ="\\$" = A

XVNI.

マド ナア'n' ナコピ ニ x x アド ナア"n' ナコッピ ニ o

enty transfer

x'\(\frac{1}{2} \

x" + y" | + z" | = 0

x"" | Y" | 2" | 2" | 2" | A

$$\zeta_{ii} = \frac{y}{P_{iii} z_i + s_{ii} s_{ii} + P_i s_{ii}}$$

$$\mathbf{x}^{*} = \frac{\alpha^{*}\xi^{*} + \beta^{*}\mathbf{u}\xi^{*} + \beta^{*}\mathbf{u}\xi^{*}}{\mathbf{x}^{*}} + \frac{\alpha^{*}\eta^{*} + \beta^{*}\mathbf{u}\eta^{*} + \beta^{*}\mathbf{u}\eta^{*}}{\mathbf{x}^{*}} + \frac{\alpha^{*}\eta^{*}}{\mathbf{x}^{*}} + \frac{\alpha^{*}\eta^{*}}{\mathbf$$

$$\mathbf{x}^{\prime\prime} = \frac{\beta^{\prime\prime\prime}\xi^{\prime\prime} + \alpha^{\prime\prime}\xi^{\prime\prime} + \beta^{\prime}\xi^{\prime\prime\prime}}{\lambda} \quad \mathbf{y}^{\prime\prime\prime} = \frac{\beta^{\prime\prime\prime}\xi^{\prime\prime} + \alpha^{\prime\prime}\eta^{\prime\prime} + \beta^{\prime}\eta^{\prime\prime\prime}}{\lambda}$$

$$\mathbf{x}^{iii} = \frac{\beta^{ii}\xi^{i} + \beta^{i}\xi^{ii} + \alpha^{iii}\xi^{ij}}{\beta^{i}} \quad \mathbf{y}^{iii} = \frac{\beta^{ii}\eta^{i} + \beta^{i}\eta^{ii} + \alpha^{iii}\eta^{ii}}{\beta^{i}}$$

$$z_1 = \frac{1}{a_1 \zeta_1 + b_2 \zeta_2 + b_3 \zeta_3 a_4}$$

$$a'' = \frac{\beta^{111}\xi^{1} + \alpha^{11}\xi^{11} + \beta^{1}\xi^{111}}{\alpha^{11}\xi^{11}}$$

c) Art ber herleitung.

1) Di $a' = \alpha'' \alpha''' - \beta'^2$ (IV.); so the worm sate α'''_1 β' , since Berthe and I. subdituite region, $a' = y''^2 z'''^2 - 2y''y''|z''z''' + z''zy'''z + z''zx'''z'' - 2x''x'''y''y''' + y''^2 x'''^2 = (y''z''' - z''y''')^2 + (z''x''' - x''z''')^2 + (x''y''' - y''x''')^2 + (z''x''' - x''z''')^2 + (x''y''' - y''x''')^2 + (z''x''' - x''z''' - x''z''')^2 + (x''y''' - y''x''')^2$

Do ferner b' = $\beta''\beta''' - \alpha'\beta'$ (IV.); fo if, wenn man für α' , β' , β''' , β''' , ibre Wertbe and I. subfituire, b' = $y^{\dagger}y'''z^{\dagger}z'' - y^{\dagger}z^{\dagger}z^{\dagger}z'' - y^{\dagger}y''z^{\dagger}z'' + y^{\dagger}y''z^{\dagger}z''' + x^{\dagger}x^{\dagger}z^{\dagger}z'''$ $-x^{\dagger}z^{\dagger}z^{\dagger}z''' - x^{\dagger}x^{\dagger}z^{\dagger}z'' + x^{\dagger}x^{\dagger}z^{\dagger}z'' + x^{\dagger}x^{\dagger}y^{\dagger}y'' - x^{\dagger}y''y'''$ $-x^{\dagger}x^{\dagger}y^{\dagger}z'' + x^{\dagger}x^{\dagger}y^{\dagger}y^{\dagger}z'' - x^{\dagger}z^{\dagger}z'' + y^{\dagger}z^{\dagger}z'' + x^{\dagger}y^{\dagger}z'' - x^{\dagger}y^{\dagger}z'' + x^{\dagger}z^{\dagger}z'' + x^{\dagger}z$

Man hat also die beiden Relationen in VII, welche fich in der erften Borizontalreibe befinden. Auf eine abnliche Art laffen fic bie übrigen baselbft angegebenen finden.

- 2) Bergleicht man I, II, IV, mit VII, VI, V; so geigt fich, daß die Größen K', K'', X''', Y', Y', 1c., A', A'', A'', B', B'', euf die nämliche Art aus &', &'', &''', \eta', \eta', \eta', \eta', \eta', \eta'', \eta'
 - 3) Wenn man in ben Gleichungen VI. fur Die Großen. Et.

man mit Sulfe von III. die Relationen IX.

... (4) Sobskienire man, in der Gleichung $\Delta' = X_{2,1}^{\prime} + Y^{\prime 2}$, $+ Z^{\prime 2} \cdot \{ \text{VNJ.} \}$ für X', Y', Z', ihre Werthe que IX, so ere halt man $\Delta' = \lambda^2 x'^2 + \lambda^2 y'^2 + \lambda^2 z'^2 \Rightarrow \lambda^2 (x'^2 + y'^2 + x'^2)$, welches die erste Relation in X. ift. Die übrigen erhält man eben so aus VIII. vermittelst der Relationen IX. und I.

5) Aus X. erhalt man $\lambda^a = \frac{A'}{\alpha'}$; ober, wenn für A' fein Werth aus V. fubstituirt wirb, $\lambda^a = \frac{a''a''' - b'^a}{a''}$

Merben bierin für all, pli, bi, ihre Werthe aus IV. gefest, fa erhöle man ben in XI., für a2 angegebenen Ausbrud. Den nämlichen Ansbrud wurde man und aus jeder anderen Stephung in X. erhalten haben.

- 6) Multiplicirt man die Gleichungen der ersten Bertikati Columne in IV. nach der Ordnung, wie sie unter einander sie Han, durch α', α'', jerner die in der zweyten Bertikals Columne durch 2β', 2β'', 2β'', und addirt hieranf asse zw femmen; so erhölt man 3α', α''' + 6β', β''β''' - 3α', β''² -3α'' β''² - 3α''' β'''² - α' α' + α'' α'' + α''' α''' + 2(b'β' + b''β'' + b'''β'''). Der exste Thost dieser Cleichung is = 3λ° (XI.). Man dat also 3λ² = a'α' + a''α'' + a'''α''' + 2(b'β' + b''β'' + b'''β'''), und hierass den in XII. anger gebenen Ausdrust.
- 7) Musisplicitt man die Gleichung XII, mit 3,2, und segt hierauf für 3,20, 8,20, 3,20, 3,23, 3,23, 3,23, ihre Were the aus X, so exhalt man die Gleichung XIII.
 - 8) Subftituirt man in XIII, ben Groffen A', A", A",

B', B", B", thre Berthe aus V, fo erhalt man bie Gleb dung in XIV.

Aus der Bergleichung von VI. und AIV: ergiebt fich, das 22 und 24 chniiche-Ausbrücke haben, senes in als, alls, alls, bl, bl, bl, bll.

grich gefest, fo erhalt man

x/y"z" + y'z"x" + z'x"y" — x'z"y" — y'x"z" — z'y"x" = IX (a'a"a" + 2 \(\beta'\

- 20) Die Relationen XVI. ergeben fich unmittelbar aus benen in X. Sie können bazu bienen, die Größen ac, ac, ac, ac, ac, be, be, be, bu, zu bestims men, wenn biese gegeben find; dem die Größen A., A., A., A., B., B., B., B., bat man-aus V. und de ans XIV.
- 22) Die Gleichungen XVII, erhalt man aus benen in If, wenn man biefe mit x', x", x", y', y", y", y", z', z', z', z', in einer leicht zu erkennenben Ordnung muftiplicirci
 - 12) Chen fo erhalt man bie Gleichungen XVIII.
- 23) Multiplicirt man die Gleichungen der erften Berei. Lal. Columne in XVII. mit &', n', &', und zwar die erfte mit &', die zweite mit n', und die briete mit &', und addiret die

Poodukte Manmen, so erhalt man $x'(\xi^{ts} + z^{ts} + \xi^{ts}) + x''(\xi^t \xi^{tt} + z^t z^{ts}) + x'''(\xi^t \xi^{tt} + z^t z^{ts}) + x'''(\xi^t \xi^{tt} + z^t z^{ts}) + x^{ts} + x^{ts}$

Bertikal, Columne in XIX. ift. Die benden anderen Gleichungen erhalt man eben so, wenn man nur mit &", n", &", und hierauf mit &", n", &", auf die namliche Art wie vorher mit &, n', &", multiplicire. Auf die namliche Art, wie hier die erfte Bertikal-Columne in XIX. aus der in XVII., abges leitet worden, kann man auch die beyden anderen Bertikal-Columnen von einander ableiten.

14) Maltiplicirt man hingegen die erfte Horigondalische der Gleichungen in XVII. mit x', y', z', nämlich die erste mit x', die zweite mit y', die dritte mit z', und addicet hieraaf alles zusammen, so erhält man &' (x'2 + y'3 + z'2) + &''(x'x'' + y'y'' + z'z'') + &'''(x'x''' + y'y''' + z'z''') = \lambda x', odet, (I) a'\x' + \beta''\x'' + \beta''\x''' + \beta''\x'' + \beta''\x''

und dies ift die erste Steichung in XX. Gen so erhalt man, wenn mit x", y", z", und x", y", z", multiplicire wird, die berden anderen Gleichungen der ersten Bertifal Columne in XX. Persährt man mit den beyden anderen Horizontalizeihen won Gleichungen in XVII. eben so, wie bier mit der ersten geschehen ist, so erhalt man die bepden anderen Vertifal Columnen in XX.

\$ 256.

Aufg. Die Aanten einer dreyseitigen Pyramide aus den Coordinaten ihrer Echpunkte ju finden.

Auft. Es fen AM'M''' (Fig. 125)' trgent eine Bry ramide, und eine threr Eden, etwa A, für die Spise und sügleich für den Anfangspunkt der Coordinaten augenommen-Es senen ferner x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', ble Coordinaten der dren Edpunkte M', M'', M'''. Alsdann hat man nach S 244 und I 255. I.

$$\Delta M' = V(x'^2 + y'^2 + z'^2) = V\alpha''$$

$$\Delta M'' = V(x''^2 + y''^2 + z''^2) = V\alpha''$$

$$\Delta M'' = V(x''^2 + z''^2 + z''^2) = V\alpha''$$

$$M'M'' = V [(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (y' - z'')^2]$$

$$= V(\alpha' + \alpha'' - z^3''')$$

Bezeichnet min daber die Seitenlinien AM', AM', AM', AM', burch k', k'', k'', und die Seiten der Grundficke M'M', M'M'', M'M'' durch p'l', p'l", p'l'', so hat man,

$$V = V \alpha'$$
, $k'' = V \alpha''$, $k''' = V \alpha'''$, $V = \omega' + \alpha'' - 2\beta'''$, $V = \alpha'' + \alpha''' - 2\beta'$, $V'' = \alpha'' + \alpha''' - 2\beta'$.

Buf. Rue ben bren letten Gleichungen erhabt man,

$$\beta' = \frac{\alpha'' + \alpha''' - 1'''}{2}, \beta'' = \frac{\alpha' + \alpha''' - 1''}{2},$$

$$\beta''' = \frac{\alpha' + \alpha''' - 1'}{2},$$

welche Ausbrucke in der Folge von Rugen fenit werden. Man

muß bierben nicht vergeffen, daß 1', 1", 1", nicht bie Seiten ber Grundfliche felbft, fondern ihre Quadrate bezeichnen.

§ 25

Aufg. Die Grangflachen einer bregfeitigen Dyramide burch die Coordinaten ihrer Edruntte ausgudruden.

 $\frac{1}{2} V (\alpha''\alpha''' - \beta''^2) = \frac{V A'}{2}.$ Bezeichnet man vaher die

Seizenflichen AMM", AMM", AM"M" burch &, &", &",

$$P = \frac{V a'''}{2}, f'' = \frac{V a''}{2}, f''' = \frac{V a'}{2}.$$

Es bleich nun noch übrig, die Grundfläche M'M''M'' juberechnen, dezen Seiten (§ 256) V^{1} , V^{1} ", V^{1} ", find-Gubstituirt; may diese Werthe für f, g, h, so erhält man, wenn $\triangle M'M''M'' = q$ geset wird,

$$q = \frac{1}{4} \mathcal{V} [4^{1/1} - (1^{i} + 1^{ii} - 1^{iii})^{2}],$$

der $16q^2 = 4 \text{ ltr} - (1 + 1m - 1m)^2$.

Sterin fege man fur 1', 1", 1", thre Werthe aus bem vor. S; dies giebe,

n) Kormirte Ausbrücke.

Marine Committee (Brass Little) $x''x''' + y''y''' + z''z''' = \beta'$ $x'''' + y'''' + z''''' = \alpha'' / x'x''' + y'y''' + z'z''' = \beta''$ $x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = \alpha'''^3$ $x'x'' + y'y'' + 2'x'' = \beta'''$ · ¥!!#!!デ#!'y'!デジ.... z"x" - x"z" = y' $\mathbf{x}'\mathbf{z}''' - \mathbf{z}'\mathbf{x}''' = \eta''$ $\mathbf{z}'\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'\mathbf{z}'' = \eta'''$ $\sharp' y''' - y'z''' = \xi'' .$ y'z" ->'y" = \$"', , , x"y"'-y"x"= 3 $y'x''' \leftarrow x'y''' = \zeta''$ $x'y'' - y'x'' = \zeta'''.$ \mathbf{m}_{s_2} Merch 10 IV. $\beta'' = a'' a''' + \beta''' + a' \beta'' + a' \beta$ $-b^{(1)} \quad \text{with } +\beta^{(1)} = 2! \quad \text{with } \quad \beta^{(1)} = b! \quad .$: war - Bills a am & ABB! - all Ame bill $\mathbf{a}''\mathbf{a}''' - \mathbf{b}'^2 = \mathbf{A}'$ b'b'''-a'b' = B'· b'b" — ≥"b" == B" 167 (14" - b" = A" -् द्वार्यास्य हाद्वाः = **४**१ 11 - MINSHI - SUMIN - X1 - / The state of the s 5 412" - GIAN AT XIN - GIEN - GIEN - GIEN - KIN The state of the work of the Zer.

b) Relacionen.

$$X^{12} + Y^{12} + Z^{12} = A'$$
 $X^{112} + Y^{112} + Z^{112} = A^{11}$
 $X^{112} + Y^{112} + Z^{112} = A^{11}$

$$X''X'' + Y''Y'' + Z''Z'' = B'$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}''' + \mathbf{Y}'\mathbf{Y}'' + \mathbf{Z}'\mathbf{Z}'' = \mathbf{B}''$$

$$\mathbf{X'X''} + \mathbf{Y'Y''} + \mathbf{Z'Z''} = \mathbf{B'''}$$

$$X' = \lambda x'$$
 $Y' = \lambda y'$ $Z' = \lambda z''$ $X'' = \lambda x''$ $Y'' = \lambda y''$ $Z'' = \lambda z'''$

$$A'' = \lambda^2 \alpha^{\mu} \qquad B^{\dagger} = \lambda^2 \beta''$$

Commence of the Name of the comment of *'a' + *"a" + *"'a" + 2 (b'3' + b"3" + b""3") ...

N 2 0-711 16 1 1 41 XIII. +

ス4 == a'a''a''+ a b'b''b'''☆☆*b''a ー a''b'''a ー a'''b'''a

The transfer with the second of the second of the second of the booking to be the XV.

■ 美国的智师十九经终于十名终间—— 美国间域——安徽园山山

本作十五作十五作一 > マミナラッド + アッドル =

x'n' + x"n" + x"'n" = 0

 $y'n' + y''n'' + y'''n''' = \lambda$ $y'n' + y''n'' + y'''n''' = \lambda$ x'\(+ x'\\ ' + x''\\ = 0

112 4 2/21 + 2"n" + 2"n" = 0 ving

='\$' + ="\$" + ="\\$" = x

AND THE SECOND OF THE SECOND O

x'8' + y'n' + z'8' = \ x"8' + y"n' + z"8' = 0

x'e" + y'u" + x'e" = x x'e" + y"a" + x"\s" = x

x' + y' + x' + x' 2'' = 0 0 x " 2" + y" + x" + x " 2" = 0 x" + y" 1 + z" ? = 0 -

x"" = x"" + x"" + x"" = x

XIX.

$$\zeta_{ii} = \frac{y}{p_{ii}z_i + \epsilon_{ii}z_{ii} + p_iz_{ii}}$$

$$\zeta_{11} = \frac{p_{1/2} + p_{1/2} + s_{11/2}}{p_{1/2} + p_{1/2} + s_{11/2}}$$

$$\mathbf{x}^{p} = \frac{\alpha \mathbf{x}^{p} + \beta \mathbf{u} \mathbf{x}^{p} + \beta \mathbf{u} \mathbf{x}^{p}}{\mathbf{x}^{p} + \beta \mathbf{u} \mathbf{x}^{p} + \beta \mathbf{u} \mathbf{x}^{p} + \beta \mathbf{u} \mathbf{x}^{p}}$$

$$\mathbf{x}_{t} = \frac{\mathbf{y}_{t}}{\mathbf{y}_{t}} + \mathbf{x}_{t} \mathbf{x}_{t} + \mathbf{y}_{t} \mathbf{x}_{t}} + \mathbf{y}_{t} \mathbf{x}_{t} \mathbf{x}_{t} + \mathbf{x}_{t} \mathbf{x}_{t} \mathbf{x}_{t} + \mathbf{y}_{t} \mathbf{x}_{t} \mathbf{x}_{t}}$$

$$2' = \frac{\alpha'\zeta' + \beta''\zeta'' + \beta''\zeta'''}{2}$$

$$\mathbf{z}'' = \frac{\beta'''\xi' + \alpha''\xi'' + \beta'\xi''''}{2}$$

c) Art ber herleitung.

Do ferner b' = $\beta''\beta''' - \alpha'\beta'$ (IV.); so if, wenn man für α' , β' , β'' , β''' , ibre Werthe and I. substituire, b' = $y^{\dagger}y'''z'z'' - y^{\prime}zz''z'' - y^{\prime}z'z''z'' + x'x''z'z''' + x'x''z'z''' - x'z'z'z''' + x'x'''z'z'' + x'x'''y'y'' - x'z'''y'y''' - x'z'''y'y''' - x'z'''y'y''' - x'z'''y'y''' - x'z''' + x'x'''y'y'' - x'z''' + x'x'''y''' - x'z''' + x'x'''y''' + x'x''' + x'x'''' + x'x''' + x'x'' + x'' + x''$

Man hat also die beiden Relationen in VII, welche fich in ber erften Horizontalreibe befinden. Auf eine abntiche Art laffen fic die übrigen baselbft angegebenen finden.

- Dergleicht man I., II, IV, mit VII, VI, V; so geigt sich, baß die Größen K', K'', X'', Y', Y'', 1c., A', A'', A'', B', B'', b'', duf die nämliche Art ans &', &'', &''', n', n', n'', 1c. gusammengesett sind, als die Größen &', &'', &''', n', n', n'', 1c. es muffen daber zwischen seinen Größen die nämlichen Relationen katt sinden, als zwischen diesen. Man kann daber auch in den Relationen VII. die Größen &', &'', &''', n', 1c., mit X', X''', X''', Y', 1c., desgleichen a', a'', a''', b', b''', mit A', A''', B', B'', B'', b''', vertauschen, wadurch man die Reslationen VIII, ethält.
 - 3) Wenn man in den Gleichungen VI. für die Großen. E.

man mit Sulfe von III. die Relationen IX.

4) Sobstituire man in der Gleichung $A' = X_{k+1}^{\prime 2} + Y^{\prime 2}$, $+ Z^{\prime 2} + (\nabla NL)$ für X', X', Z', ihre Werthe aus IX, so ere halt man $A' = \lambda^2 \kappa'^2 + \lambda^2 y'^2 + \lambda^2 \kappa'^2 = \lambda^2 (\kappa'^2 + y'^2 + \kappa'^2)$, welches die erste Relation in X, ik. Die übrigen erhält man eben so aus VIII. vermittelst der Reclationen IX. und I.

5) Aus X. erhalt man $\lambda^a = \frac{A^a}{\alpha'}$; ober, wenn für A^a

fein Werth aus V. substituirt wird, 2 = a"a" b's

Marben bierin für all, all, b', ihre Werthe aus IV. gefote, fa erhäle man ben in XI. für da angegebonen Ausbruck. Den admitchen Ansbruck wurde man und aus jeder anderen Gletz dung in X. exhalten haben.

- 6) Multipliciet man die Gleichungen det eesten Nertikali Columne in IV. nach der Ordnung, wie sie unter einander fleichen, durch α', α', α', serner die in der zwenten Bertikali. Columne durch 2β', 2β'', 2β''', und addirt hierauf alles zur sammen; so erhölt man 3α', α''' + 6β', β''β''' 3α', β''' 3α', β''' + 3α''' + 3α'' + 3\alpha'' + 3\alpha'
- 7) Musiplicirt man die Gleichung XII, mit 2, und sept hierauf für 22a', 22a', 22a'', 22a''', 22a'', 22a'',
 - 8) Subflituirt man in XIII, den Großen A', A'', A'',

B', B'', B''', thre Berthe aus V, fo erhalt man bie Gleb dung in XIV.

Aus der Bergleichung von XI. und AIV: ergiebe fich, das amb 24 chniche-Ausbrucke haben, jenes in al, all, all, bi, bl, bll, bll, bll.

7 9) Werben die Werthe von daus III. und IX. einander gleich gefeht, fo erhalt man

#/y//z/!! + y/z/!x!!!, + z/x!/y!!! - x/z!/y!!! - y/x*/2!!! - z/y!!x!!!

= \(\land \land

- 20) Die Relationen XVI. ergeben fich unmittelbar aus denen in X. Sie können dazu dienen, die Größen al., all, all, be, ble, ble, zu bestime men, wenn biese gegeben find; dem die Größen A', All, All, Bl, Ble, hat man aus V. und da aus XIV.
- 22) Die Gleichungen XVII, erhalt man aus benen in II, wenn man biefe mit x', x", x", y", y", y", x', 2", x", x", in einer leicht zu erkennenden Ordnung muftiplicirc
 - 12) Eben fo erhalt man die Gleichungen XVIII.
- 23) Multiplicitt man die Gleichungen der erften Berthe Kal: Columne in XVII. mit &', n', &', und zwar die erfte mit &', die zweite mit n', und die britte mit &', und addiret die

Produkte minumen, fo erhalt man $x'(\xi^{in} + z^{in} + \xi^{in}) + x'''(\xi^{i}\xi^{i}i^{i} + n^{i}n^{ii} + \xi^{i}\xi^{in}) + x'''(\xi^{i}\xi^{i}i^{i} + n^{i}n^{ii} + \xi^{i}\xi^{in}) = \lambda \xi^{i}$, where $(VII)_{i} = x^{i}x^{i} + b^{in}x^{ii} + b^{in}x^{ii} + b^{in}x^{ii} = \lambda \xi^{i}$, also $\xi^{i} = x^{i}x^{i} + b^{in}x^{ii} + b^{in}x^{ii}$; welches die erste Gleichung der ersten

Bertikal. Columne in XIX. ift. Die benden anderen Gleichuns gen erhält man eben so, wenn man nur mit &", n", 2", und bierauf mit &", n", 2", auf die namliche Art wie vorber mit &', n', 2', multiplicirs. Auf die namliche Art, wie hier die erfte Bertikal. Columne in XIX. aus der in XVII., abges leitet worden, kann man auch die beyden anderen Bertikal. Columnen von einander ableiten.

14) Maltiplicirt man hingegen die erste Korisontalische. der Gleichungen in XVII. mit x', y', x', namlich die erste mit x', die dweite mit y', die dritte mit z', und addiret hieraaf alles dusammen, so erhält man &' (x'2 + y'2 + z'2) + &''(x'x'' + y'y'' + z'z'') + &'''(x'x''' + y'y''' + z'z''') = \lambda x', oder, (I) a'\x' + \beta''' + \beta''' + \beta''' + \beta''' \lambda x'', also

 $\mathbf{z}' = \frac{\alpha'\xi' + \beta'''\xi'' + \beta''\xi'''}{\lambda};$

und dies ift die erfte. Sleichung in XX. Gen so erhalt man, wenn mit x", y", z", und x", y", z", multiplicirt wird, die benden anderen Gleichungen der erften Bertifal. Columne in XX. Verfährt man mit den benden anderen Horizontalizeihen von Sleichungen in XVII. eben so, wie hier mit der erften geschehen ist, so erhalt man die bepden anderen Vertiskal. Columnen in XX.

\$ 246.

Aufg. Die Kanten einer dreyseitigen Pyramide aus den Coordinaten ihrer Copuntte zu finden.

Auft. Es fen AM'M'M" (Ag. 115)" frigelit eine Poperamide, und eine threr Eden, etwa A, für die Spige und sügleich für den Anfangspunkt der Coordinaten augenommen. Es senen feinen x', y', x', x'', y'', a'', x''', y''', E''', Bie Coordinaten der dren Edpunkte M', M'', M''', Alsdann hat man nach \$ 244 und \$ 255. I.

$$\Delta M' = V(x'^2 + y'^2 + z'^2) = V\alpha''$$

$$\Delta M'' = V(x''^2 + y''^2 + z''^2) = V\alpha'''$$

$$\Delta M''' = V(x''^2 + y''^2 + z''^2) = V\alpha'''$$

$$M'M'' = V [(x' - x'')^2 + (y' - x'')^3 + (x' - x')^3]$$

$$= V(\alpha' + \alpha'' - x^3''')$$

Bezeichnet man daber die Seitenlinien AM, AM", AM", AM", burch k', k", k", und die Seiten der Seinfoftde M'M", M'M", M"M" durch VI, VI", VI", fo hat man,

$$V = Va'$$
, $k'' = Va''$, $k'' = Va''$, $V = a' + a'' - 2\beta''$, $V = a' + a'' - 2\beta'$, $V = a'' + a''' - 2\beta'$,

Buf. Aus den bren letten Gleichungen erhalt man,

$$\beta' = \frac{\alpha'' + \alpha''' - 1'''}{2}, \ \beta'' = \frac{\alpha' + \alpha''' - 1''}{2},$$

 $\beta''' = \frac{\alpha' + \alpha'' - 1'}{2}$

welche Ausbrude in ber Folge von Rugen fenti werbeit. Man

muß bierben nicht bergeffen, baf 1', 1", 1", nicht die Geiten ber Grundfläche felbft, Jondern thre Quadrate bezeichnen.

§ 257.

Aufg. Die Grangflachen einer bregfeitigen Dyramide burch die Coordinaten ihrer Edruntte ausgudruden.

Nufg. Wenn f, g, h, die drei Seiten eines Drenedes bezeichnen, fo ift, wie bekannt, der Inhalt duffelben = \forage V[4] f g = - (f + p = h = x]. Uni daher den Inhalt bis Drenedes AM'M" zu finden, muß man (5 255) f = Va', g = V a'', h = V (a' + a'' - 2 | m'' | fegen; dies giebt AM'M" = \forage V (4 a'a'' - 4 \beta''x) = \forage V (a'a'' - \beta'''x) = (\forage 255 \text{ IV.}) \frac{\forage u''}{2}. Eben fo findet man \text{ AM'M'''}

$$= \frac{1}{2} \mathcal{V} (\alpha'\alpha''' - \beta''^2) = \frac{\mathcal{V} \cdot \epsilon''}{2}, \text{ unb } \triangle \text{ AM''M'''} =$$

 $V(\alpha''\alpha'''-\beta''')=\frac{V^{A'}}{2}$ Bezeichnet man baber die Geisenflächen AMM", AM'M", AM'M" durch f', f", f", fe, if,

$$P = \frac{Va'''}{a}, f'' = \frac{Va''}{a}, f''' = \frac{Va'}{a}.$$

berechnen, dezen Seiten (§ 256) V 1, V1", V 1" find. Subflituiert, may diese Werthe für f, g, h, so erhölt man, wenn \(M'M''M''' = q gesest wird, '

 $q = \frac{1}{4} V [411^n - (1 + 1^n - 1^{n})^2],$

oder $16 q^x = 4 l'l'' - (1' + 1''' - 1''')^x$. Hierin sege man für l', l'', l'', thre Werthe aus dem vor. S; dies giebt,

$$4q^2 = (\alpha' + \alpha'' - 2\beta'')(\alpha' + \alpha''' + 2\beta'') - (\alpha' + \beta' - \beta'' - \beta''')^2$$

$$= \alpha'\alpha'' + \alpha'\alpha''' + \alpha''\alpha''' + 2\alpha''\beta' - 2\alpha''\beta'' - 2\alpha''\beta'' - 2\alpha''\beta'' + 2\beta''\beta''' + 2\beta''\beta''' + 2\beta''\beta''' + 2\beta''\beta''' + 2\beta''' + 2b''' + 2b''$$

and daher,

$$q = \frac{1}{4} V (a' + a'' + a''' + ab'' + ab'' + ab''').$$

Aumerk Bolle man die Granflachen unmittetbar in x', y', a', x'', y'', ac., ausgebrudt haben, so durfte man nur für die Buchkaben a', a'', a''', b'' b'', b''' ihre Berthe aus \$ 255 I. und IV. substituiren. Es ift indeffen weit vortheib hafter, diese vertürzten Ausbrude bengubehalten, weil fie eine leichtere Nebandlung gestatten.

§ 258.

Aufg. Den Inhalt einer drevseitigen Pyramide aus den Coordinaten ihrer Eckpunkte zu finden.

Anfl. 1) 11m den Inhalt der Puramide zu finden, muß man ihre Grundsidde M'M''M'' mit dem dritten Sheile der Höhre multipticiren, d. h. mit dem dritten Sheile des Perpenditels, welches aus A auf die Seene M'M''M'' herabger lassen wird. Man sesse dieses Perpenditel = p; es kann aus § 246 gesanden werden, wenn die Sleichung der Sbene M'M''M'' bekannt ift. Denn ift Ax + By + Ck + D = 0 die Sleichung dieser Sbene, so ist, weil für den gegenwärtligen Fall die Soordinaten des Punktes, worans das Perpendiktel gezogen wird, = 0 sind,

$$P = \frac{-D}{V(A^{2} + B^{2} + C^{2})} = \frac{-1}{V\left[\left(\frac{A}{D}\right)^{2} + \left(\frac{B}{D}\right)^{2} + \left(\frac{C}{D}\right)^{2}\right]}$$

2) Da hier dren Punfte M', M", M", oermittelft ihrer Coordinaten x', y', z', x", y", z'n, x", y'n, z'n, z'n, gegeben find, so lassen sich nach s 240 die Größen A B C, für die durcht gelegte Seenen M'M"M" bestimmen. Es ift nämlich, wenn von den Substitutionen & 255 II. und III. Gebrauch gemache wird,

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{D}} = \frac{-(\xi^{n} + \xi^{n'} + \xi^{m'})}{\lambda}, \quad \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{D}} = \frac{-(\eta^{n} + \eta^{n'} + \eta^{m'})}{\lambda},$$

$$\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}} = \frac{-(\xi^{n} + \xi^{m} + \xi^{m'})}{\lambda}.$$

Man erhalt alfo burd die Gubftitution biefer Berthe,

 $\frac{\lambda}{V[(\xi'+\xi''+\xi'')^2+(\eta'+\eta'')^2+(\zeta'+\zeta''+\zeta'')^2]}$ vber, wenn man das, was fich unter dem Wurzelzeichen ber findet, entwickelt, und hierauf von den Relationen § 255
VII. Gebrauch machet,

$$V(a'+a''+a'''+2b''+2b''+2b''')$$

3) Nach dem vor. § ift aber der Inhalt der Grundfiche M'M'M''= $\frac{1}{4}V(a'+a''+a'''+ab'+ab''+ab''')$; also ift der Inhalt der Kyramibe = $\frac{\lambda}{6}$.

Diefer bocht einfache und mertwurdige Ausdruck ift mans derlen Formen fabig, je nachdem man einen voer ben ander ren von den in § 255 III, XI, XII, XIII, XIV, XV, aus gegebenen Ausdrucken nimmt.

\$ 250.

Aufg. Den Inhalt einer breyseitigen Pyramide aus ihren Rauten gu finden.

Geometrie II.

Muft. Rach dem porigen f ift biefer Inhalt $=\frac{\lambda}{6}$

= IV (α'α"α" + 2β'β''β'' — α'β'' — α''β'' — α'''β'''). Werden hierin für β', β'', β''', ihre Werthe aus § 256 Bul. gefest, so erbalt man den Inhalt ver Pyramide =

$$\frac{4 \alpha' \alpha'' \alpha''' - \alpha'' (\alpha'' + \alpha''' - 1'')^2 - \alpha'' (\alpha' + \alpha''' - 1'')^2}{-(\alpha'' + \alpha''' - 1')^2 + (\alpha'' + \alpha''' - 1'')(\alpha' + \alpha''' - 1'')}$$

worin (§ 256) Va', Va'', Va''', VI'', VI''', Die secht Kanten der Pyramide find.

Dieses Resultat stimmt mit dem in § 100. 3 gefundenta wollig überein; wenn man nur der dortigen Bezeichnung ger mas, a2, b2, c2, d2, c2, T2, für a7, a4, a44, 17, 14, 144, sept. § 250.

Aufg. Die vier Eckpunkte einer Dyramide find, vers mittelft ihrer Coordinaten gegeben: man foll eine Gleuchung zwischen den Entsernungen eines beliebigen Punkte P von diesen vier Eckpunkten finden.

Aufl. Es senen Vd, Vd", Vd", Vd", bie Entfernungen des Punktes P von den Punkten A, M', M", mnd x, y, z, die Coordinaten des Punktes P; alsdann ift (§ 244)

$$x^2 + y^2 + z^2 = d$$
 $(x-x')^2 + (y-y')^2 - + (z-z')^2 = d'$
 $(x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2 = d''$
 $(x-x'')^2 + (y-y''')^2 + (z-z''')^2 = d'''$

oder (§ 255, I.)

$$x^{2} + y^{3} + z^{3} = d$$
 $x^{2} + y^{2} + z^{2} - 2xx' - 2yy' - 2zz' = d' - \alpha'$
 $x^{3} + y^{2} + z^{3} - 2xx'' - 2yy'' - 2zz'' = d'' - \alpha''$
 $x^{3} + y^{2} + z^{3} - 2xx''' - 2yy''' - 2zz''' = d'' - \alpha'''$

Wird jede an ben bren letten Gleichungen Win ber erften wogezogen, und ber Rarge wegen,

$$\frac{\alpha'+d-d\zeta}{2} = k', \frac{\beta''+d-d''}{2} = k'',$$

$$\frac{\alpha''+d-d'''}{2} = k'''.$$

Belett ? fo erhale man bie bren Gleichungen.

Die Auflösung Diefer Gleichungen nach x, y, u, giebt, wenn man die Gubflitutionen & 255 II. III. braucht,

Werben biefe Berife in der Gleichung x3 + y2 + a2 = d substituirt, so erhalt man vermittelft der Relationen \$ 255 VII.

And = a'kin + a''k''n + a'''k''n + 2 (b'''k'k'' + b'k'k''' + b'k'k''')

Dierin kann man nun wieder für b', k'', k''', ihre Berthe subskituiren; alsbann wird eine Gleichung beraustommen, welche teine andere Größen als die Entfernungen d, d', d'', d''', und die gegebenen Größen a', a'', a''', b', b'', b''', enthalt.

Anmert. Bermittefft ber hier gefundenen Gleichung tast fic auch bie Aufgabe auflofen, wenn vier Puntte A, B, C, D, gegeben find, und bie Entfernung eines anderen Punt

ges P von drepen derfulben A, B, O, bekannt ift, feine Entfen nung von bem vierten D'ju finden.

Aufg. Um eine gegebene brevfeitige Pyramide eine Augel zu beschreiben.

Muft. Wird der Punte P des vorigen J's fur ben Die

telpuntt der umichtiebenen Angel : angenommen, : fo muf d = d' = d" = d"/ fepn. Afebann wird aber k' = -,

k" = all, k" = all. Berbin biefe Beribe in ber Glei-

Dung bes por. S's subflittlirt, so erhalt man,

 $4\lambda^{2}d = \begin{bmatrix} a^{1}\alpha^{12} + a^{11}\alpha^{112} + a^{111}\alpha^{1112} + b^{11}\alpha^{1112} + b^{11}\alpha^{1112} + b^{11}\alpha^{1112} \end{bmatrix}$ and daber,

a'a's + a"a"s + a"a's + 2(bula'a') + bua'a' + b'a''a'')

Man hat also ben halbmesser der Lugel.

11m die Lage ibres Mittelpunttes P gu beftimmen, muß man in den im vor. 5 für x, y, z gefundenen Ausbrucken für k', k", k", ihre Werthe =, ubftituirens man et

ball alsbann

$$x = \frac{\alpha'\xi' + \alpha''\xi'' + \alpha'''\xi'''}{2\lambda}$$

a!n' + a"n" + a"n"

Bus. Will man d, d. b. das Quadrat vom Halbmeffer Ser Rugel, unmittelbar durch die Kanten der Ppramide ausdrucken, so darf man nur in dem für dasselbe gefundenen Ausstrucke für a', a'', a''', b', b'', b''', htt. Betiste aus § 255 IV. und für 22 seinen Werth aus § 253 KI. substituiren. Man erhalt alsdann d bloß durch a', a'', a''', b', b'', b''', anoger druckt und diese Größen und durch die Kanten der Pyramide gegeben (§ 256).

f 262.

Aufg. Die Perpenditel zu finden, weiche aus irgend einem gegebenen Dunkte P, außerhalb oder innerhalb der Pyranide, auf ihre Granzflachen berabgelassen werden.

Aufl. Es feven xt, yt, pt, die Coordinaten des Punts des P, also gegeben. Es bezeichne fesner p das Perpendikel auf der Grundfiche M'M''M'', und p', p'', p4'', die Perpendikel auf die Seitenflächen AM'M'', AM'M'', AM''M''.

1) Es sen Ax + By + C2 + D = 0 die Gleichung ber Sene M'M"M"; alsdann ift das Perpenditel, welches aus dem Puntte P auf die Sbene herabgefassen wird (§ 246)

$$= -\frac{Ax^{t} + By^{t} + Cz^{t} + D}{V(A^{2} + B^{2} + C^{2})} = \frac{A}{\overline{D}}x^{t} + \frac{B}{\overline{D}}y^{t} + \frac{C}{\overline{D}}z^{t} + 2}{V\left[\left(\frac{A}{\overline{D}}\right)^{2} + \left(\frac{B}{\overline{D}}\right)^{2} + \left(\frac{C}{\overline{D}}\right)^{2}\right]}$$

Werben hierin für $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, thre Werthe aus \$ 258, 2 sube

$$\mathbf{p} = \frac{\left[-\lambda + (\xi^{1} + \xi^{11} + \xi^{11}) \times^{2} + (\eta^{1} + \eta^{11} + \eta^{11}) \times^{2} + \right]}{\left[(\xi^{1} + \xi^{11} + \xi^{11})^{2} + (\eta^{1} + \eta^{11} + \eta^{11})^{2} + (\xi^{1} + \xi^{11} + \xi^{11})^{2}\right]}$$

pher auch, wenn man das, was fic unter dem Wurzelzeichen hefindet, entwickelt, und von den Relationen § 255, VII. Ges hrauch machet,

$$B = \frac{\sqrt{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x$$

and dies ift der Ausbruck bes Perpentitels auf ber Grunde flache.

2) Aus diesem får p gesundenen Ausdrucke lasten sich nun die Ausbrücke für pl. pl., pl., pl., berleiten. Deun läst man nach einander die Hunste Mil, Mil, Mil, auf A sallen, indem man sedesmat die benden anderen Ponkte unverändert läst, so ger det das Orever MiMilminach einander in AM/Mil, AM/M

$$p'' = \frac{\xi''x^{2} + \eta''y^{2} + \xi''z^{2}}{Vz''}$$

$$p''' = \frac{\xi''x^{2} + \eta'y^{2} + \xi''z^{2}}{Vz''}$$

$$Vz'' = \frac{\xi''x^{2} + \eta'y^{2} + \xi''z^{2}}{Vz''}$$

und dies, find die Perpenditel auf ben Seitenflachen der Pro-

\$ 263.

Aufg. Die Perpendikel aus irgend einem Punkte P auf die brey Seitenflächen einer Pyramide find gegeben: man foll die Lage Dieses Punktes bestimmen.

Auft. Diese Aufgabe ift das timgefehrte von der des vor. Ce. hier find namlich die Perpenditel p', p", p" gegeben, und die Coordinaten x2, y2, z2, des Punftes P werden gesucht. Man muß alfo die daselbft gefundenen dren Gleb dungen

$$\xi'''xxx + \eta'''yx + \xi'''xx = p''Vx'''$$

 $\xi''xx + \eta''yx + \xi''xx = p'''Vx''$
 $\xi'xx + \eta'yx + \xi'xx' = p'''Vx'$

nach x1, x1, 24 auflosen. Die Anflosung biefer Gleichungen giebt, wenn man die Relationen § 255 VI. XV, braucht,

$$\mathbf{x}^{\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{p}^{\prime\prime\prime} \mathbf{V} \mathbf{a}^{\prime} \cdot \mathbf{X}^{\prime} + \mathbf{p}^{\prime\prime} \mathbf{V} \mathbf{a}^{\prime\prime} \cdot \mathbf{X}^{\prime\prime} + \mathbf{p}^{\prime\prime} \mathbf{V} \mathbf{a}^{\prime\prime\prime} \cdot \mathbf{X}^{\prime\prime\prime}}{\lambda^{2}}$$

$$\mathbf{y}^{\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{p}^{\prime\prime\prime} \mathbf{V} \mathbf{a}^{\prime\prime} \cdot \mathbf{Y}^{\prime} + \mathbf{p}^{\prime\prime} \mathbf{V} \mathbf{a}^{\prime\prime} \cdot \mathbf{Y}^{\prime\prime} + \mathbf{p}^{\prime} \mathbf{V} \mathbf{a}^{\prime\prime\prime} \cdot \mathbf{Y}^{\prime\prime\prime}}{\lambda^{2}}$$

$$\mathbf{a}^{\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{p}^{\prime\prime\prime\prime} \mathbf{V} \mathbf{a}^{\prime\prime} \cdot \mathbf{Z}^{\prime} + \mathbf{p}^{\prime\prime\prime} \mathbf{V} \mathbf{a}^{\prime\prime\prime} \cdot \mathbf{Z}^{\prime\prime} + \mathbf{p}^{\prime\prime} \mathbf{V} \mathbf{a}^{\prime\prime\prime} \cdot \mathbf{Z}^{\prime\prime\prime}}{\lambda^{2}}$$

oder wenn für X4, X14, X14, X4, Y4, 10., ihre Werthe aus § 255 IX. substituirt werden,

$$x^{z'} = \frac{p''' V_{a'} \cdot x' + p'' V_{a''} \cdot x'' + p' V_{a'''} \cdot x''' + p' V_{a'''} \cdot x'''}{\lambda}$$

$$x^{z'} = \frac{p''' V_{a'} \cdot x' + p'' V_{a''} \cdot x'' + p' V_{a'''} \cdot x'''}{\lambda}$$

Die Coordinaten des Punktes P find also gefunden, und hier durch der Nunkt selbst.

XVII. Sinige vermischte Aufgaben und Lehrlage.

\$ 264

In fg. Die dren Seiten eines Drevedes find geges ben: man foll die Linien finden, welche von den Spigen deffelben nach den Salbirungspunkten der gegenüber lies genden Seiten gezogen werden.

Aufl Die Griten AB = 23, BC = 23', AC = 23", (Fig. 316) find gegeben; es werden die kinien CD = d, AE = d', BF = d" genucht.

In bem Drenede ADC hat man,

Cos, ADC =
$$\frac{\text{CD}^2 + \text{AD}^2 - \text{AC}^2}{2 \text{CD. AD}} = \frac{\text{d}^2 + \text{s}^2 - 4\text{s}''^2}{2 \text{ds}}$$

und in dem Drenede CDB,

Cos. CDB =
$$\frac{\text{CD}^2 + \text{DB}^2 - \text{BC}^2}{2 \text{ CD, DB}} = \frac{d^2 + s^2 - 4s'^2}{2 \text{ ds}}$$

Da nun Cos. ADC = - Cos. CDB; fo hat man bie Stest chung.

Sierans erhalt man

and even fo'

265.

Aufg. Die drey Linien, welche von ben Spigen, eines Drevedes nach den Salbirungspunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogen worden, find gegeben: man foll die Seiten des Drevedes finden.

Auft. Man, darf nur in, ben, brev, Gleichungen bes, wor. 5's

$$2.6^{12} + 2.5^{1/2} - 8^2 = d^2$$

 $2.5^2 + 2.5^{1/2} - 5^{1/2} = d^2$
 $2.5^2 + 2.5^{1/2} - 5^{1/2} = d^{1/2}$

Die Größen a, s', a", ale die unbefannten anfeben, und fie darnach auffofen, fo erhalt man.

woraus fic, s. st, st', beftimmen laft.

§ 266.

Lehrs. In jedem Vierecke ist die Summe der Quas drate der wier Seiten, so groß als die Summe der Quas drate seiner beyden Diagonalen nebst dem vierfachen Quadrate der Linie, welche ihre Zalbirungspunkte verebindet.

Bem. Es sen (Fig. 117) AB = a, BC = s', CD = s'', DA = a'', AC = d, BD = d', und die Linie MM', welche die Halbirquigspunkte verbindet = m.

Man laffe von den Punkten M, M', die Perpendikel Mm, M'm', herab, und fege Am == x, Mm == y, Am' == x', M'm' == y', Aledann ift.

DP = 2y, CQ = 2qt, Bm = a - x, BP = 2Bm = 2x, AQ = 2x, AP = BP - AB, = a - 2x, BQ = AQ - AB = 2x' - a, PQ = AP + AQ = 3 - 2x + 2x'.

Mun ist BC's = BQ's + CQ', CD's = PQ's + (DP - CQ)'s,

AD's = AP's + DP's, AC's = AQ's + CQ's, BD's =

BP's + DP's, MM's = (Mm - M'm')'s + (Am' - Am)'s.

Berden, hierin für die Linien, ihre Werthe geseht, so, erhält wan,

 $a^{12} = 4x^{12} - 48x^{6} + 4x^{6} + 4y^{12}$ $a^{1/2} = a^{2} - 4ax + 4ax^{6} + 4x^{6} - 8xx^{7} + 4x^{72} + 4y^{12}$ $- 8yy^{7} + 4y^{72}$

 $s^{11/2} = s^2 - 4sx + 4x^2 + 4y^2$

 $\mathbf{d}^2 = 4\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{y}^4$

 $d'^2 = 4x^2 - 8xx + 4x^2 + 4y^2$

Wird nunmehr von der Symme der dren erften Gleichungen

die Summe der plerten und fünften abgezogen, fo erhalt man

$$a^{1/2} + a^{1/2} + a^{1/2} - d^2 - d^2 - 4x^{1/2} - 8x^{1/2} + 4x^2 + 4y^2 - 8yy' + 4y'^2 - a^2$$

oder

12 + s'12 + s'112 - d2 - d14 = 4m2 - 42 Ober enblich-

> s² + s¹² + s¹¹³ + s¹¹¹² = d² + d¹² + 4m². W. 3. E. W.

§ 267.

Aufg. Ce foll ein Dreged gefunden werben, in web dem zweg ber Seiten ein gegebenes Verbaltniß baben.

und der Cubus der duftten Geite fo groß ift, ale bie Summe ber Cuben jener beyden Seiten.

Aufl. Es fen 2: m das gegebene Berfoltnis der zwen Geiten, und x die eine derselben; alsdam ift die andere mx. Sest man nun dem unbekannten Winkel, welcher von diesen Geiten eingeschlaffen wird, = φ_k so ift die dritte Seite

V(x2 + m2x2 - 2 mx2 Cos. φ) = xV(1+m2 - 2mCos. φ). Nach den Bedingungen der Aufgabe foll aber der Eubus.

Diefer Seite ber Summe ber Guben ber benten anberen Sebten gleich fenn; man bat alfo bie Gleichung

 $x^{3} (x + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{\frac{3}{2}} = x^{3} + m^{3}x^{3}$ ber $(1 + m^{2} + 2m \cos \varphi)^{\frac{3}{2}} = 1 + m^{3}$ ber $1 + m^{3} - 3m \cos \varphi = (1 + m^{3})^{\frac{3}{2}}$

und biefe giebe

Cos.
$$\phi = \frac{1 + m - (x + m^3)^{\frac{3}{2}}}{2m}$$

moraus pa o bestimmen läße.

\$ 268.

Aufg. Ein Winkel eines Drevedes ift gegeben: man foll dassenige finden, fur welches ber Cubus der diesem Winkel gegenüber liegenden Seite so groß ist, als die Summe der Cuben der ihn einschließenden Seiten.

Aufl. Da der Wintel gegeben ift, so ift auch fein Cofinus gegeben; er fep = c. Da ferner die Aufgabe nur zwey Bedingungen enthalt, gur Bestimmung eines Orepeds aber bren Bedingungen erfordert werden, so geboret fie an den um bestimmten. Ce fen 1: x das Nerhaltnis der benden den gegebenen Bintel einschließenden Seiten, und die eine diefer Seiten = y, alfo die andere = xy. Aus den Seiten x, xy, und dem eingeschlossen Wintel findet man nun die dritte Seite

$$= V(y^2 + x^2y^2 - 2cy^2x) = yV(1 + x^2 - 2cx).$$

Da nun der Eubus diefer Seite der Summe der Euben ber Denben anderen Seiten gleich fenn foll; fo hat man die Bleichung

$$y^{3} (1 + x^{2} - 2cx)^{\frac{3}{2}} = y^{3} + x^{3}y^{3}$$
obset
$$(4 + x^{2} - 2cx)^{\frac{3}{2}} = 1 + x^{3}$$
obset
$$(1 + x^{2} - 2cx)^{3} = (1 + x^{2})^{2}.$$

Wenn man diefe Geidung entwickelt, und das, was fic aufe Bebt, weglaft, fo erhalt man,

$$(13c_5 + 2) x_5 + 9cx = 0$$

 $(25c_5 + 2) x_4 + (8c_5 + 13c + 5) x_5 -$

ober

$$x^{4} - \frac{12c^{2} + 3}{6c}x^{3} + \frac{8c^{2} + 12c + 2}{6c}x^{3} - \frac{12c^{2} + 3}{6c}x + 1 = 0.$$

Diefe Steichung ift von vierten Grade, und awar geborret fie gie berjenigen Claffe, welche man reciprote Gleit dungen zu nennen pflegt; die fich immer in quadratische Steichungen gerlegen laffen. (Man sebe unter anderen Eustens Anatos. des Unendl. überf. von Michelsen, Eh. III. Seite 23 u. f.)

\$ '269.

Aufg. Ein Dreyect zu finden, worin die nten Pos

tengen zwever Seiten zusammen genommen der nien Dos teng der dritten Seite gleich ift, und worin fene beyoen Beiten ein gegebenes Berbaltniß haben.

Auft. Die Auftbfung ift ber in § 267 fur die britte Poten, vollig abnitch. Man bat alfo, wenn die bott gebrauchte Bezeichnung bepbehalten wird,

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = z^{n} + m^{2}z^{n}$$

$$(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

$$z^{n}(t + m^{2} - 2m \cos \varphi)^{2} = t + m^{n};$$

Anmert. Bu biefer und den benden vorhergehenden Aufgaben wurde ich burch eine ahnliche eines Englanders, Namens Glenie veranlaßt, (m. f. Archiv der reinen und angew. Mathem. heft IV. Seite 481,) bie in der That durch Raftners Anzeige mehr Aufmerksamkeit erregt hat, als sie verdient, und von welcher fich im achten hefte ben Archivs dren Auflösungen, namlich von hagner, haub er und Backer besinden.

\$ 270.

Aufg. Be find zwey Kreise der Lage und Größe nach gegeben: man soll eine Linie ziehen, welche beybe Kreise zugleich berührt.

Aufl. Es fenen C, C', (Fig. 118) die Mittelpunkte ber bebben Kreise; ihre Entfernung CC' = d, Der Satbmeffer

des epfen = r, des zwenten = r'. Die gesuchte Langente tann nun entweber die Lage MM' haben, so daß bende Ber rührungspunkte M, M' auf einer und derselben Seite der Lo nie CO' fallen, oder die Lage PP', so daß die Berührungs, vankte P, P' auf verschiedenen Seiten der CO' fallen.

Erker Sald Es fen T der Punkt, wo die Langente MM' die Linie CC' trifft, und C'T = x. Ziehet man nun die Halbmeffer CM, C'M', fo ift OM: C'M' = CT: C'T, woer x: x' = d + x: x, und duber.

$$x = \frac{dr'}{r - r'} = C'T,$$

alfo

$$\mathbf{CT} = \mathbf{d} + \frac{\mathbf{dr'}}{\mathbf{r} - \mathbf{r'}} = \frac{\mathbf{dr}}{\mathbf{r} - \mathbf{r'}},$$

Smepter Fall. Es sen t ber Punkt, wo die Langens te PP' die Linie CC' schneidet, und C't = y. Ziehet man nun die Halbmeffer CP, CP', so ift CP: C'P' = Ct: C't, ober r: r' = d - y: y, und daher

$$y = \frac{dr'}{r + r'} = O't,$$

alfo

$$Cr = d - \frac{dr'}{r + r'} = \frac{dr}{r + r'}$$

Bus. Wenn die Langenten M'M', P''P'', gezogen werben, so haben x und y für diese Langenten die namlichen Werthe als für die Langenten MM', PP'. hieraus folgt aber, daß sowohl der Punkt, in welchem sich die Linien MM', M''M'' schneiden, als auch der, in welchem sich die Linien PP', P'P'' schneiden, auf die Linie CC' fällt.

5 271.

Arbri. Wenn man an jede zwey von brey ungleis

chen, ber Größe und Lage nach gegebeiten Areisen, Enm genten, wie die im ersten Salle des vor. I's zieber: so liegen die Durchschnittspunkte von jedem Paare solcher Cangenten in einer einzigen geraden Linie.

Bew. 1) Es fepen C, C', C'' (Aig. 129) bie Mittel punkte der dren gegebenen Rreife, und M, M', M'', die Punkte, wo die dren Paare von Langamen fich schneidens es sok nun bewiesen werden, daß die Punkte M, M', M'' in einer geraden Linie liegen werden. Bu dem Ende darf nut betwie sen werden, daß, wenn von den Punkten M', M'', auf die Linie CC' die Perpendikel M'm', M''m'', gezogen werden, die Proportion Mm': Mm'' = M'm' flatt sinde.

- 2) Man bezeichne die Halbmeffer ber dren Kreise, deren Mittelpunkte C, C', C'', sind, darch x, x', x'', und die Entsernungen dieser Mittelpunkte von einander, oder CC', CC'', CC'', in der Ordnung, wie sie hier genannt werden, durch d, d', d''. Man ziehe ferner auf CC' das Perpendikel C''p, und sesse G''p = h.
- 3 Aus den dren Seiten des Drenedes CC'C" finder man die Segmente Cp, C'p; es ift namtic,

$$Cp = \frac{d^2 + d'^2 - d'^2}{2d},$$

$$C'p = \frac{d^2 + d'^2 - d'^2}{2d},$$

4) Aus bem vor. f erhalt man,

$$GM_{i} = \frac{dr}{r - r'}, \quad G'M = \frac{dr'}{r - r'},$$

$$G'M'' = \frac{d''r'}{r'' - r'}, \quad CM' = \frac{d'r}{r'' - r}$$

5) Die ahnlichen Drenede C"Cp, M'Cm' geben nun

$$M'm' = \frac{CM' \cdot C''p}{CC''} = \frac{hr}{r'' - r}$$

$$Cm' = \frac{CM' \cdot Cp}{CC''} = \frac{r (d^a + id'^a - d''^a)}{a d \cdot (r'' - r)}$$

ferner bie abnlichen Trepede C"C'p, M"C'm"

$$M''m'' = \frac{C'M'' \cdot C''P}{C'C''} = \frac{\operatorname{chr'}}{\pi'' - \pi'}$$

$$C'm'' \stackrel{\prime}{=} \frac{C'\tilde{M}'' \cdot C'p}{C'C'^2} = \frac{r' \cdot (d^2 + d''^2 - d'^2)}{2d \cdot (r'' - r')}.$$

6) hierans ferner,

$$Mm' = CM + Cm' = \frac{dr}{r - r'} + \frac{r(d^2 + d'^2 - d''^2)}{2d(r'' - r)}$$

$$\frac{d^{2}r'(xr''-r'-r)+r'(r-r')(d'^{2}-d'^{2})}{2d'(r-r')(r''-r)}$$

$$Mm'' = C'M - Cm'' = \frac{dr'}{r - r'} - \frac{r' (d^2 + d''^2 - d'^2)}{2d (r'' - r')}$$

$$= \frac{d^2r' (2r'' - r' - r) + r' (r - r') (d'^2 - d''^2)}{2d (r - r') (r'' - r')}$$

ober

$$Mm' = \frac{r}{r'' - r} \left[\frac{d^2 (2r'' - r' - r) + (r - r') (d'^2 - d'^2)}{2d (r - r')} \right]$$

$$Mm'' = \frac{r'}{r'' - r'} \left[\frac{d^2 (2r'' - r' - r) + (r - r') (d'^2 - d''^2)}{2d (r - r')} \right]$$

Dietraus ergiebt fich,

Geometrie IL

$$Mm': Mm'' = \frac{r'}{r'' - r} : \frac{r'' - r''}{r'' - r'}$$

Rad 5 ift aber aud ...

folglid ift

Mm': Mm" = M'm': M"m",

und daber liegen die Puntte M', M', in einer geraden Linte. 28. 8. & 28.

\$ 272

Lehrs. Wenn zwey auf einer Augelfläche beschriebene Breise fich berühren: so liegt ihr Berührungspiinkt in dem Bogen eines größten Breises, welcher ihre Pole verbindet.

Bew. Es sopen A, B, die Pole der benden Kreise KL, MN, (Fig. 120) welche man sich auf einer Angetsiche gezeichent denken muß. Läge nun der Borahrungspunkt C ber bem den Kreise nicht in dem Bogen ADEB, welcher ihre bevoen Pole verbindet, so kounts-man die Bogen größter Kreise AC, BC, dieben; alsdann ware AC = AD, BC = BE, also AC + BC < AB, welches unmöglich ist, da in jedem seharbschen Drepecke die Summe wever Seiten immer größer ist, als die dritte.

\$ 273. _-

Aufg. Auf einer Augelfiache find brey Areise geger ben: man foll auf der namlichen Augelfiache einen vierren Breis finden, welcher jene brey beruhrt.

Aufl. 1) Es feven A, B, C (Fig. 191) die Pole der drop gegebenen Rreife, und D der Pol des gesuchten Kreifes.

Man, werdinds die Punkte A, B, C, Drinkich bie Gogen-größter. Kneise AB; AC, BC, DA, DB', DC; wovon die dres festenen, nach dem norm flidurch die Gerührungspunkte apid, w. den gesucken. Reissen mit dem dern gegebenen, gefich werden.

- 2) Man bezeichne nun die Bogen An, Bb, Cc, welche hier als die Bogen Salbmeffer ber been gegebenen Kreise am gefeben werden konnen, durch a, b, c, und den Bogen Salbe meffer des gesuchten Kreises Du = Db = Do durch x.
- 5) In \$ 55 wurde eine Gleichung swischen ben vier Seisen eines spherischen Biereckes und seinen benden Diagonalen gefunden. Sest man namlich AB = m, AC = n, BD = p, ED = q, AD = r, BC = s, so ift nach dem angeführten Orte
- 2—(Cos. m² + Cos.n² + Cos. p² + Cos. q² + Cos. r² + Cos.s²)

 + (Cos. m² Cos. q² + Cos. n² Cos. p² + Cos. r² Cos. s²)

 + (2 Cos. m² Cos. n Cos.s + 2 Cos. p² Cos. p Cos. r + 2 Cos. n Cos. q Cos. r + 2 Cos. p Cos. q Cos. s

 (2 Cos. m Cos. p Cos. q + 2 Cos. m Cos. q Cos. n Cos. s)

 + 2 Cos. n Cos. p Cos. r Cos. s
- 4) In dieser Steichung find die Bogen m, n, s, gegeben, weil es die Kreise A, B, C ihrer Lage nach find; ferner ift x = a + x, p = b + x, q = c + x. Es ift also in dieser Gleichung bloß x unbekannt; ihre Austosung kann nun, wie folgt, geschehen.
 - 5). Es tommt alles bioß darauf an, die Ausdrude Cos. p., Cos. q., Cos. x., Cos. q. Cos. p. Cos. y., Cos. y. Cos. y. Cos. y., Cos. y. Cos. y., Cos.

Frisen erhalte: Num ist Cos. po = \(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \) Cos. 2p = \(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \) Cos. 2b Cos. 2x - \(\frac{1}{2} \) Sin. 2b Sin. 2x, while even fo Gos. $q^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \) Gos. 2a Cos. 2x - \(\frac{1}{2} \) Sin. 2c Sin. 2x, Cos. <math>r^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \) Gos. 2a Cos. 2x - \(\frac{1}{2} \) Sin. 2x Sin. 2x. Seth ner ist Cos. (c + x) = \(\frac{1}{2} \) Cos. (b + c) + \(\frac{1}{2} \) Cos. (b + c) Sin. 2x, with seven [0,$

Cos. p Cos. r ==

 $\frac{1}{4}$ Cos. $(a + b) + \frac{1}{4}$ Cos. (a + b) Cos. $2x + \frac{1}{4}$ Sin. (a + b) Sin. 2x,
Cos. q Cos. r =

ECos. (a - v) + i Cos. (a + c) Cos. 2x - i Sin. (a + c) Sin. 2x. Berben alle diese Werthe in der vorigen Gleichung jubfib tuirt, so erhalt diese die Form A + B Sin. 2x + C Cos. 2x = a. Wie eine solche Gleichung aufgeloft wird, ift schon aus dem brsten Theile dieser Sammlung zur Genuge bekannt. Dividiret man namlich diese Gleichung durch C, und soss hiereuf

Cot. a., fo hat man din, (a + 2 %) = A din. a. Merens fich

± bestimmen last."

Berbefferungen.

- 251 - 9 v. v. flatt AB × MM" L AB × M'M" -- 255 - 7 v. v. flatt + CDE L + \(\triangle CDE - \)

— 284 — 7 v. o. flatt + 2BPC [. 2\triangle BPC — — 342 — 5 v. o. flatt z' x" L 2'x" —

— 346 — 10 v. o. flatt yy^{mz/zu} [. y'y^{mz/zis} — 349 — 12 v. u. ift de weggistreichen. —

.

In der Frölichschen Buchhandlung zu Berlin find nachstebende mathematische Werke verlegt und um bengefeste Preise ben ihr und burch alle Buchhand. lungen zu baben:

Dofmanns mathematifche Clementarfdule, ober Anleitung jum funftlofen Denten über mathematifche Begenftanbe; mit ? Rupfern. 8. 803. 2 Ehir.

Abers Anfangegrunde ber Arithmetif. gr. 8. 803. 18 Gr.

- Anfangegrande der Geometrie. gr. 8. 803. 18 Gr. - Softem ber reinen, und angewandten Dechanit fefter Rocs per, 2 Ehle. gr. 8. mit R. 802. '3 Ebir.

Eheorie der Bewegung der Weltforper unfers Sonnenfo. ftems und ihrer elliptifchen figur, nach La Place frei bears beitet. gr. 8. 801. 2 Ehlr.

Rraufe's Sandbud der mathematifchen Forftwiffenicaften; m. Labellen und Rupfern. gr. & 800. 2 Chir. La Croir's Anfangsgrunde der Arithmetit; a. d. Frangof, übers

fest, gr. 8. 804. 1 Ebir.

- Anfangsgrunde der Algebra; a. d. Frangof. überfest. 2 Ebie. gr. 8. 804 u. 805. 3 Ehlr.

Anfangegrunde ber ebnen und fpharifden Erigonometrie und ber bobern Geometrie; a. d. Frang. überf. mit 5 Rupf. gr. 8. 805. 1 Ehlr. 8 Gr.

- Anfangegrande ber Seometrie; mit 7 Rupf. gr. 8. 806. 1 Thir. 16 Gr.

- meitere Ausführung gu feiner Geometries mit 10 Dupf. ar. 8. 806. 1 Ehlr. 4 Gr.

Deier hirfd Sammlung von Benfpielen, Formeln und Aufe gaben aus der Buchftabenrechnung und Algebra; 8. i Eblr.

- Samminng geometrifder Aufgaben; ir Ebi. m. Rupf. 8. 805. 2 Khir. 16 Gr.

Monge's Anfangegrande ber Statil; a. d. Frang. überfest, mis 5 \$. gr. 8. 806. 20 Gr.

Buiffant's Cammlung verschiebener Aufgaben der Geometrie: a. d. Frang. überf. mit 2 R. gr. 8. 806. 16 Gr.

Simmermann's Entwidelung analytifder Grundfage fur ben erften Unterricht in ber Mathematit, befonbers für Diejenis gen, welche fic ohne mundliche Anweisung Darüber belebe ren wollen. Mit i R. gr. 8. 805.

्राच्या विश्वविद्यात्त्र क्षेत्रक विद्याप्त । अस्ति । Sama Same of the self of the the transfer of the self of the se

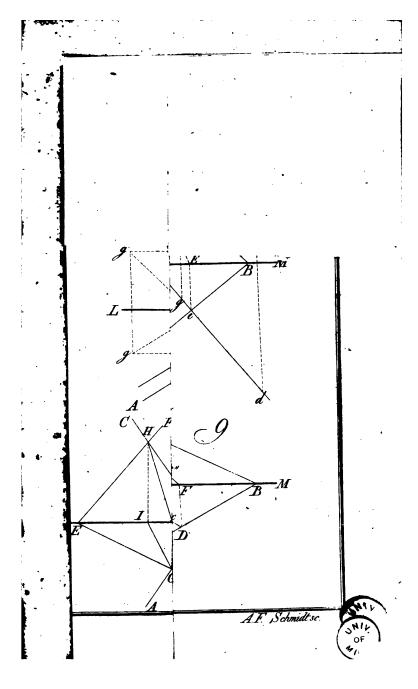
Link Coging of 30 statistic in in the contract that the contract t

भारतां अवस्था के स्वर्धित है। यह स्वर्धित के स्वर्धित

i kanggan meraktik di Partiran anggan di Kanggan di Salat. Kejang senggapan pertirangan di Partirang panggan panggan

And the territory of the second

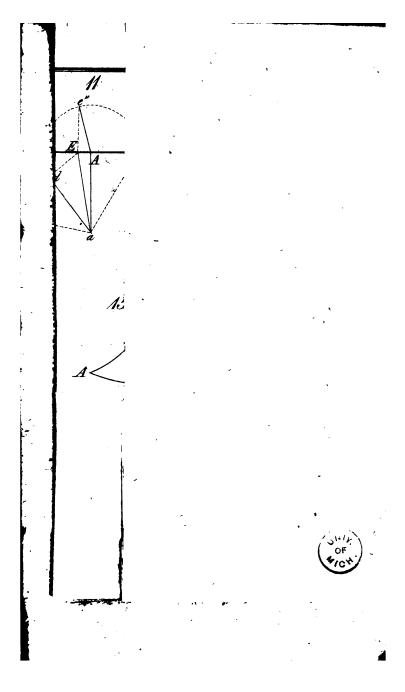
A CONTRACTOR OF THE STATE OF TH



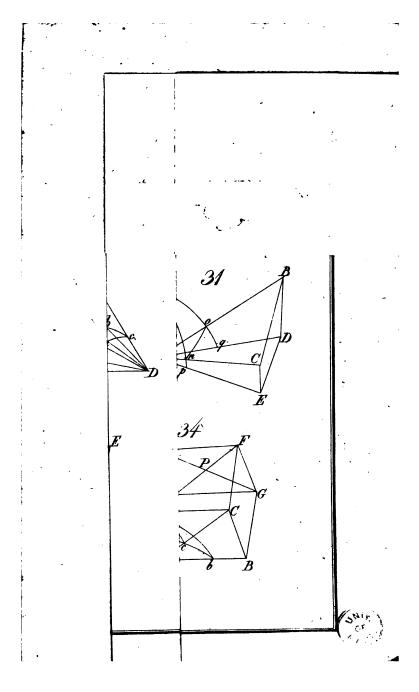
----• ••••

•

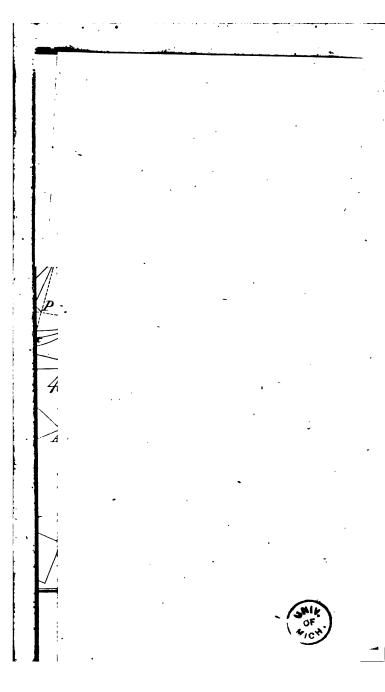
... .

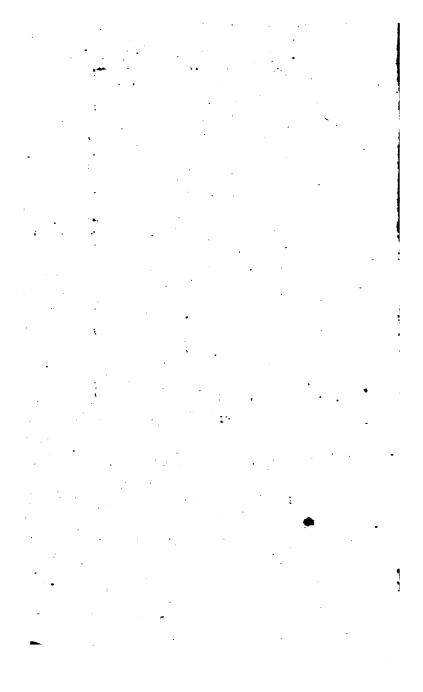


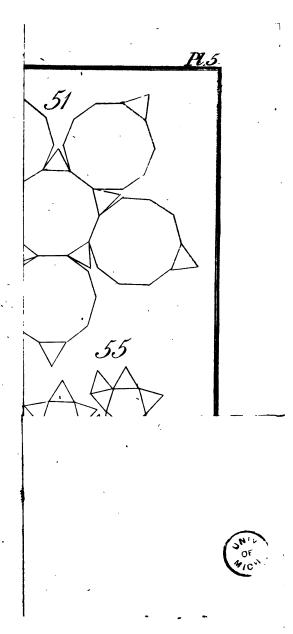




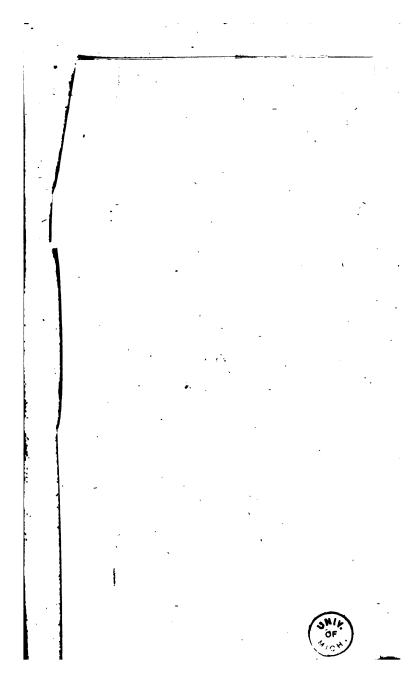




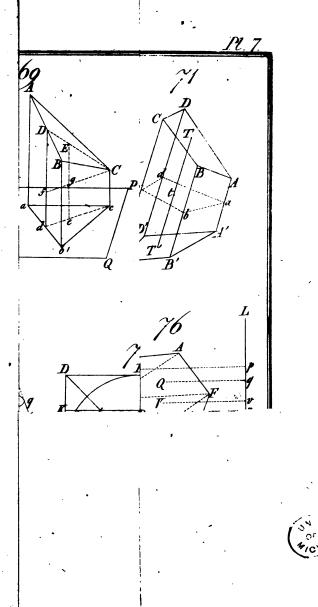


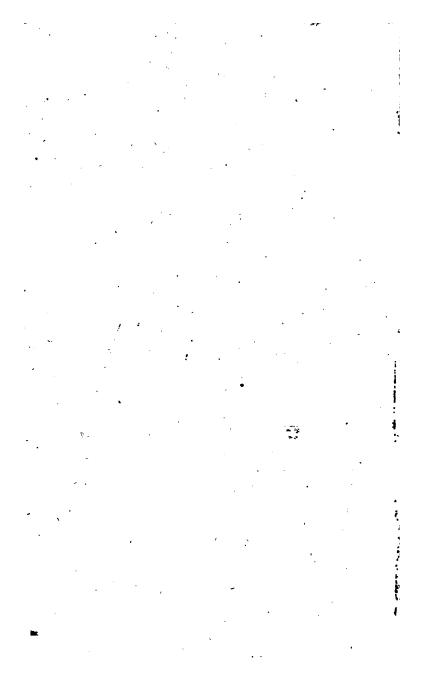


•









Z F

